

Charakterystyka zbioru równowag w submodularnych grach z indywidualną podażą dóbr publicznych

Łukasz Woźny*

Nadesłany: 5 czerwca 2008 r. Zaakceptowany: 22 kwietnia 2009 r.

Streszczenie

W pracy rozpatrujemy statyczną i dynamiczną gospodarkę z indywidualną podażą wydatków na dobro publiczne. Celami pracy są: podanie warunków wystarczających do istnienia równowagi Nasha gry opisującej takie gospodarki oraz charakterystyka struktury zbioru tych równowag dla ogólnych funkcji produkcji dobra publicznego.

Metody użyte w pracy opierają się na wynikach optymalizacji funkcji super- i submodularnych (Topkis 1995) i są uogólnieniem szerszej klasy agregatów metod użytych w pracach: Amir, Lambson (2000) oraz Sundaram (1989a).

Słowa kluczowe: dobra publiczne, strategiczna substytucyjność, gry submodularne

JEL: C72, C73, H41

* Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Katedra Teorii Systemu Rynkowego; e-mail: lukasz.wozny@sgh.waw.pl.

1. Wstęp

Rozpatrzmy gospodarkę z indywidualną podażą wydatków na dobro publiczne. Najczęściej spotykanym w literaturze opisem takiej gospodarki (por. Bergstrom, Blume, Varian 1986) jest model niekooperacyjnej gry w postaci strategicznej pomiędzy skończoną liczbą graczy, z których każdy wybiera strategię maksymalizującą użyteczność z konsumpcji jednego dobra prywatnego i jednego dobra publicznego produkowanego przez agregat zadany w postaci sumy indywidualnych nakładów na dobro publiczne. Określając dynamikę dobra publicznego, analogicznie opisuje się także dynamiczną gospodarkę z indywidualną podażą dobra publicznego. Podkreślmy, że założenie o funkcji produkcji (agregacji) w postaci sumy oznacza doskonałą substytucyjność nakładów i jest stosowane głównie wówczas, gdy nakłady poszczególnych podmiotów na produkcję dobra publicznego da się przedstawić za pomocą jednostek pieniężnych.

Celami niniejszej pracy są: podanie warunków wystarczających do istnienia równowagi Nasha gry opisującej statyczną i dynamiczną gospodarkę z indywidualną podażą dobra publicznego oraz charakterystyka struktury zbioru tych równowag bez odwoływania się do założenia o agregacji w postaci sumy nakładów. Aby osiągnąć te cele, wykorzystamy własności komplementarności i substytucyjności (Samuelson 1974) preferencji oraz funkcji produkcji (agregacji) dobra publicznego, powodujących powstawanie ich strategicznych odpowiedników (Bulow, Geanakoplos, Klemperer 1985).

Zauważmy, że przyjmowane założenia o monotoniczności funkcji produkcji dobra publicznego (agregatu) i preferencji powodują, iż substytucyjność strategii jest niejako wpisana w strukturę analizowanej gospodarki. Poza wypadkiem silnej komplementarności nakładów w funkcji produkcji dobra publicznego zachodzi bowiem następująca prawidłowość: im więcej inni gracze przeznaczają na wspólny agregat, tym wyższa jest użyteczność danego gracza, a więc tym bardziej może być osłabiona jego skłonność do analogicznego zachowania. Z tego powodu w pracy skoncentrujemy się na gospodarkach ze strategiczną substytucyjnością, modelując je za pomocą gier (quasi-) submodularnych.

Ze względu na brak symetrycznych wyników co do punktów stałych dla odwzorowań rosnących i malejących dotychczasowe wyniki (dotyczące istnienia i struktury zbioru równowag) dla gier ze strategiczną substytucyjnością nie są tak bogate jak dla gier ze strategiczną komplementarnością. Analizę gry ze strategiczną substytucyjnością zawiera np. artykuł: Dubey, Haimanko i Zapechelnyuka (2006), a gry z agregatami publicznymi – teksty Kukushkina (1994a, 1994b). Twierdzenia przedstawione w niniejszej pracy wpisują się więc w tę literaturę i można je interpretować jako dalszą próbę wypełniania luki pomiędzy wynikami dla gier ze strategiczną substytucyjnością oraz z komplementarnością.

Pozostała część pracy jest zorganizowana w następujący sposób: w części drugiej przedstawiamy genezę problemu i budujemy intuicję odnośnie do dalszych wyników. W części trzeciej omawiamy wyniki literatury z tego zakresu, w części czwartej przedstawiamy najważniejsze wyniki dla gospodarki statycznej, a w części piątej analogiczne dla gospodarki dynamicznej. Pracę kończą wnioski, bibliografia oraz aneks zawierający dowody twierdzeń.

2. Geneza problemu

Zanim szczegółowo omówimy wyniki pracy, przedstawimy genezę analizowanego zagadnienia oraz uzasadnimy wybór problematyki przeprowadzonych badań. W celu sprecyzowania rozważań jako przykład dobra publicznego przyjmijmy jakość środowiska naturalnego.

Rozpatrzmy wypadek Robinsona, który czerpie użyteczność z konsumpcji oraz jakości środowiska naturalnego, w którym żyje. Konsumpcja zwiększa użyteczność, ale także poziom zanieczyszczeń (bezpośrednio oraz pośrednio przez produkcję dóbr konsumpcyjnych). Posiadane zasoby (czas, majątek) Robinson może przeznaczyć na produkcję dóbr konsumpcyjnych albo na poprawę jakości środowiska (np. redukcję zanieczyszczeń). W dalszej części rozpatrzmy tylko wypadek, w którym jakość środowiska nie jest satysfakcjonująca (np. na skutek własnych bądź cudzych decyzji o poziomie produkcji oraz konsumpcji). Sytuacja komplikuje się, gdy na wyspie Robinsona pojawiają się inne osoby. Wtedy ujawnia się bowiem, że środowisko naturalne jest dobrem publicznym, wywołującym efekty zewnętrzne. W tej sytuacji decyzje Robinsona co do podaży nakładów na oczyszczanie środowiska są strategicznie uwarunkowane decyzjami pozostałych mieszkańców wyspy. Ze względu na publiczny charakter dobra, jakim jest jakość środowiska, analizowana sytuacja prawdopodobnie (poza wypadkiem silnej komplementarności nakładów w technologii oczyszczania środowiska) charakteryzuje się strategiczną substytucyjnością, tzn. nakłady poszczególnych podmiotów na ochronę środowiska są substytucyjne względem siebie. Im więcej zatem inni mieszkańcy wyspy przeznaczają na ochronę środowiska, tym mniej nakładów przeznaczają Robinson, optymalnie reagując na te zachowania. Interesujące jest więc zagadnienie istnienia oraz charakterystyki równowagi gospodarki w przypadku takich interakcji. Dodatkowo, ze względu na możliwość występowania wielu omawianych równowag uzasadniona jest także próba ich rozróżnienia i porównania. Zasadne jest postawienie pytania: jak współzależne decyzje wynikające z preferencji, oczekiwań czy schematów zachowań będą determinowały ewolucję jakości środowiska na analizowanej wyspie. Inaczej: do jakiego stanu będzie zmierzać sytuacja na wyspie w długim okresie przy uwzględnieniu współzależnych zachowań podmiotów? Pytania te ujawniają swoją wagę, jeżeli uwzględnimy trzy kwestie: (1) dzisiejsze decyzje wpływające na jakość środowiska mogą ujawnić swoją wagę dopiero po długim czasie, (2) nawet niewielkie zaburzenia systemu mogą w długim okresie wytrącić go ze stanu ustalonego i powodować dalekosiężne skutki, (3) część procesów powodujących zmiany jakości środowiska może mieć charakter nieodwracalny.

Wyniki badań biologicznych i ekologicznych wskazują, że zarówno nagromadzenie zanieczyszczeń poszczególnych podmiotów, jak i zmiany poziomu zanieczyszczeń w środowisku mogą być wysoce skomplikowane, w szczególności nieaddytywne i nieliniowe (por. np. Scheffer 1997). Z tego względu, jak również z powodu tego, że wciąż nie wszystkie agregaty i dynamiki poziomu zanieczyszczeń w środowisku są dobrze opisane, nie możemy się ograniczyć do agregatów zadanych w postaci sumy nakładów oraz jedynie linowych dynamik akumulacji – por. prace: Arrowa, Brocka, Dasgupty, Maelera, np. Dasgupta, Maeler (2003). Z tych powodów zasadne jest opracowanie narzędzi teoretycznych do analizowania gospodarek z indywidualną podażą dóbr (czy antydóbr) publicznych dla ogólnych klas funkcji agregujących i opisujących dynamikę ich zagregowanego poziomu w równowagowych strategiach doskonalących ze względu na podgry.

Zaznaczmy, że jakość środowiska naturalnego nie jest jedynym dobrem publicznym, w przypadku którego przyjmowanie założeń o addytywności, (quasi-)wklęsłości czy nawet ciągłości agregatu jest mało uzasadnione. Do tej klasy można zaliczyć np. gry z indywidualną podażą nakładów na prace projektowe przynoszące użyteczność wszystkim jego uczestnikom (takie, które spełniają definicję dobra publicznego w ramach danej organizacji). Tego typu gry (por. Dubey, Haimanko, Zapechelnyuk 2006) mogą wyróżniać się kilkoma istotnymi cechami wykluczającymi zastosowanie „standardowych” agregatów. Milgrom i Roberts (1990) oraz Kremer (1993) argumentują np., że wiele zadań w nowoczesnych przedsiębiorstwach cechuje się wysoką komplementarnością poszczególnych nakładów. Wyklucza to możliwość zastosowania w analizie agregatów w postaci sumy nakładów, a więc cechujących się doskonałą substytucyjnością wysiłku poszczególnych pracowników. Również zmienna w trakcie prac projektowych lub trudna do identyfikacji krańcowa produktywność nakładów poszczególnych pracowników znacznie ogranicza możliwość zastosowania założenia o wklęsłości funkcji produkcji (agregacji). Niejednokrotnie nawet małe zmiany nakładów na prace projektowe poszczególnych pracowników mogą powodować duże, wręcz skokowe zmiany jego efektów, decydujące nawet o powodzeniu całego projektu. W konsekwencji założenie o ciągłości funkcji agregacji może być także restrykcyjne.

3. Dotychczasowe wyniki

W niniejszej części pracy wskażemy najważniejsze¹ wyniki dotyczące istnienia równowag i charakterystyki struktury zbioru równowag Nasha dla statycznych i dynamicznych gier z indywidualną podażą dobra publicznego.

Bergstrom, Blume i Varian (1986; 1992) oraz Fraser (1992) w rezultacie analizy odwzorowań najlepszej odpowiedzi określili warunki istnienia jedynej równowagi Nasha w grze z podażą wydatków na dobro publiczne (także wiele dóbr), z agregatem w postaci sumy i ściśle quasi-wklęsłą funkcją użyteczności dla każdego gracza (por. także Watts 1996). Analogiczne wyniki uzyskali Cornes, Hartley i Sandler (1999) za pomocą twierdzenia o punkcie stałym dla odwzorowań zbliżających. Z kolei Cornes i Hartley (2007) za pomocą metody opartej na analizie tzw. funkcji zastąpienia (*replacement function*) wykazali istnienie równowagi oraz omawiali wyniki z zakresu statyki komparatywnej. Założyli jednak, że odwzorowanie najlepszej odpowiedzi jest funkcją.

Najsłabsze znane nam warunki istnienia równowagi Nasha w grze z publicznym agregatem są zawarte w pracach: Kukushkin (1994a) oraz Dubey, Haimanko, Zapechelnyuk (2006). Kukushkin (1994a) wykazuje, że warunkiem wystarczającym istnienia równowagi Nasha w omawianych grach jest rozłączność funkcji użyteczności względem dobra publicznego i prywatnego. Dodajmy, że warunek rozdzielnosti Kukushkina jest także wystarczający, w takim rozumieniu, że dla klasy rozłącznych funkcji użyteczności istnieją zbiory strategii oraz funkcje agregujące, dla których odpowiadające im gry nie mają równowag Nasha. Z kolei metoda analizy równowag Nasha, omówiona w pracy: Dubey, Haimanko, Zapechelnyuk (2006), opiera się na łącznym wykorzystaniu monotoniczności i półciągłości selekcji z odwzorowania najlepszej odpowiedzi (por. twierdzenie 2 i 3 w ich pracy) oraz tzw. gier potencjalnych (*potential games*).

¹ Zainteresowanych czytelników odsyłamy do obszernego przeglądu literatury w pracy: Woźny (2008).

Wykorzystując metodę zaproponowaną w pracy: Amir i Lambson (2000), przedstawimy alternatywny w stosunku do prac Kukushkin (1994a) czy Dubey, Haimanko, Zapechelnyuk (2006) i intuicyjnie interpretowalny zestaw założeń, gwarantujący występowanie równowag Nasha gier statycznych z agregatem publicznym. Ponadto zaprezentujemy wyniki charakteryzujące strukturę gier z substytucyjnością strategii.

Wyniki w literaturze przedmiotu dotyczące gier dynamicznych nie są tak obszerne. Standardową (por. np. Fudenberg i Tirole 2002) metodą udowadniania istnienia oraz charakterystyki struktury równowag Nasha jest analiza punktów stałych odwzorowania najlepszej odpowiedzi zdefiniowanego na przestrzeni strategii. Podobnie jak w pracach: Sundaram (1989a) lub Leininger (1986)², wykażemy za pomocą tej metody występowanie następującego błędnego koła poszukiwania równowag Nasha. Niech przykładowo strategie Markowa pozostałych graczy będą półciągłe z góry. Wtedy odwzorowanie najlepszej odpowiedzi będzie miało mierzalny wybór, choć niekoniecznie półciągły z góry³, co uniemożliwia zastosowanie wyników odnośnie do punktów stałych odwzorowania (najlepszej odpowiedzi) zdefiniowanego na przestrzeni strategii. Jeżeli dalej ograniczymy się do ciągłych strategii przeciwników, wtedy zgodnie z twierdzeniem Berge'a o maksimum (por. Berge 1997) wiemy, że odwzorowanie najlepszej odpowiedzi będzie półciągłe z góry, ale niekoniecznie będzie miało ciągły wybór. Silniejsze warunki co do strategii pozostałych graczy nie pozwalają na przerwanie tego błędnego koła. Metoda poszukiwania równowagi Nasha jako punktu stałego odwzorowania zbioru strategii w sobie, na analizowanym poziomie ogólności, nie zawsze daje więc rezultaty.

Alternatywnie⁴ Sundaram (1989a, 1989b) proponuje metodę poszukiwania równowagi Nasha jako punktu stałego operatora zadanego w przestrzeni zagregowanych decyzji poszczególnych graczy. W pracy rozszerzymy tę metodę na klasę ogólnych postaci funkcyjnych agregatów (produkcji dobra publicznego).

4. Gospodarka statyczna i główne wyniki

Rozpatrzmy $I \in \mathbb{N}$ jednoosobowych gospodarstw domowych, każde (i -te, gdzie $i \in 1, 2, \dots, I \} = N$) reprezentowane przez użyteczność postaci: $U^i(c^i, q)$, gdzie c^i oznacza poziom konsumpcji i -tego gospodarstwa, a q to wielkość dobra publicznego (lub krótko agregat). Każde z gospodarstw podlega ograniczeniu budżetowemu opisanemu przez równanie: $w^i = c^i + pa^i$, gdzie w^i to dochód i -tego gospodarstwa, a^i – indywidualne nakłady na produkcję dobra publicznego (lub krótko nakłady), p – cena jednostki nakładu do produkcji dobra publicznego. Wielkość dobra publicznego q jest determinowana przez funkcję Q nakładów $a = (a^1, a^2, \dots, a^I)$, czyli profilu indywidualnych nakładów na produkcję dobra publicznego, gdzie $a^{-i} = (a^1, a^2, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^I)$ reprezentuje nakłady gospodarstw innych niż i ; analogicznie definiujemy c^{-i} i w^{-i} .

² Leininger (1986) omawia model spadków międzypokoleniowych za pomocą gry dynamicznej, a więc struktura przedstawionego przez niego zagadnienia jest różna od analizowanej w niniejszym artykule. Niemniej jednak metoda poszukiwania równowagi Nasha jako punktu stałego odwzorowania zbioru strategii w sobie jest analogiczna do przedstawionej przez Leininger.

³ Por. Sundaram (1989a).

⁴ Amir (1989) oraz Sundaram (1989a) omawiają symetryczną, dynamiczną grę akumulacji kapitału i podają warunki istnienia symetrycznej równowagi Markowa w grze z agregatem w postaci sumy.

Rozpatrzmy przeformułowanie funkcji U^i do postaci:

$$F^i(a^i, Q(a), \theta) \equiv U^i(w^i - pa^i, Q(a^i, a^{-i})), \quad (1)$$

gdzie $\theta \in \Theta$ to wektor parametrów. Ze względów interpretacyjnych będziemy także używać zapisu funkcji $D^i : \times_{i \in N} A^i \times \Theta \rightarrow \mathfrak{R}$, $D^i(a, \theta) = F^i(a^i, Q(a), \theta)$ albo, pomijając oznaczenie parametrów, zapisu $D^i(a)$.

Na potrzeby dalszej analizy przyjmijmy następujące założenie.

Założenie 4.1. Dla każdego $i \in N$ zachodzi:

- $A^i = [0, \bar{a}^i]$, gdzie $\bar{a}^i = \frac{w^i}{p}$,
- $Q = [\underline{Q}, \bar{Q}] \subset \mathfrak{R}$, gdzie $\underline{Q} = Q(0, \dots, 0)$, $\bar{Q} = Q(\bar{a})$,
- $w^i \in \mathfrak{R}_+$, $p \in \mathfrak{R}_+$, $a \in \Theta = \{(w, p) : w^i \in \mathfrak{R}_+, p \in \mathfrak{R}_+\}$ to zbiór parametrów,
- $F^i : A^i \times Q \times \Theta \rightarrow \mathfrak{R}$ jest półciągłą z góry, malejąca z pierwszym i rosnąca z drugim argumentem dla każdej wartości $\theta \in \Theta$,
- $Q : \times_{i=1}^I A^i \rightarrow Q$ jest półciągłą z góry i rosnącą z a oraz $Q(a^1, \dots, a^I) = Q(a^{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a^{\sigma^{-1}(I)})$ dla każdej permutacji σ zbioru graczy.

Założenie, że Q jest funkcją rosnącą z a wyklucza agregaty np. postaci⁵ minimum oraz maksimum⁶. Założenie o funkcji produkcji (agregacji) dobra publicznego ma odzwierciedlać obserwację, iż agregat nie rozróżnia jednostek. Podkreślimy, że założenie o półciągłości z góry funkcji użyteczności można zawęzić do założenia o jej ciągłości, np. dla „standardowych” (ciągłych) klas preferencji. Próba zawężenia założenia o półciągłości agregatu założeniem o jego ciągłości w świetle uwag z rozdziału drugiego jest bardziej restrykcyjna. Powodem jest m.in. ograniczenie możliwości występowania nieciągłości produkcji (akumulacji) dobra publicznego charakterystycznej dla takich dóbr publicznych, jak jakość środowiska naturalnego czy wyniki prac projektowych.

Oznaczamy przez $G_{MSP} = (N, \{F^i, A^i\}_{i \in N}, Q, \Theta)$ statyczną gospodarkę I podmiotów z pełną informacją. Formalnie równowagę gospodarki G_{MSP} zdefiniujemy następująco:

Definicja 4.1 (równowaga G_{MSP}). Równowagą gospodarki G_{MSP} jest profil a_* taki, że $(\forall i \in N) a_*^i \in \arg \max_{a^i \in A^i} D^i(a^i, a_*^{-i}, \theta)$.

Równowagami gospodarki G_{MSP} są więc równowagi Nasha w strategiach czystych (PSNE) gry Γ w postaci strategicznej, gdzie $\Gamma = (N, \{A^i, D^i\}_{i \in N})$. Z tego powodu, używając narzędzi z teorii gier niekooperacyjnych, skoncentrujemy się na analizie gry Γ odpowiadającej gospodarce G_{MSP} .

Rozpoczniemy od zdefiniowania $(\forall i \in N)$ odwzorowania najlepszej odpowiedzi: $\Psi^{i, \theta} : \times_{j \neq i} A^j \rightrightarrows A^i$, gdzie:

$$\Psi^{i, \theta}(a^{-i}) = \{a_*^i : a_*^i \in \arg \max_{a^i \in A^i} D^i(a^i, a^{-i}, \theta)\}$$

a $\theta \in \Theta$. Niech także $\Psi^\theta : \times_{i=1}^I A^i \rightrightarrows \times_{i=1}^I A^i$, gdzie $\Psi^\theta = (\Psi^{i, \theta})_{i=1}^I$. Zauważmy, że istnienie rozwiązania problemu maksymalizacyjnego dla każdej jednostki (a więc poprawność sformułowania odwzorowania najlepszej odpowiedzi) jest zagwarantowane przez półciągłość z góry $(\forall i \in N, \forall a^{-i})$ funkcji D^i względem zmiennej a^i i zwartość dziedziny A^i .

⁵ Porównaj z pracami: Hirshleifer (1983), Bliss, Nalebuff (1984).

⁶ Tj. $Q(a) = \min_i a^i$ albo $Q(a) = \max_i a^i$.

Kolejno przedstawimy teraz główne wyniki pracy. W twierdzeniu 4.1 uogólnimy podejście prezentowane m.in. przez Amira i Lambsona (2000) i podamy alternatywną wobec omówionych w części trzeciej metodę otrzymania warunków istnienia symetrycznej równowagi Nasha w symetrycznej grze Γ , bez odwoływania się do założenia ciągłości funkcji F^i i jednoczesnym przyjęciu intuicyjnie interpretowalnego założenia co do przyrostów⁷ funkcji F^i i Q .

Twierdzenie 4.1 (o istnieniu PSNE). Rozpatrujemy symetryczną⁸ grę Γ . Jeżeli funkcja F^i ma malejące przyrosty między (a^i, q) oraz jest wklęsła względem pierwszego argumentu, a funkcja Q jest ciągła oraz ma rosnące przyrosty z a , wtedy gra Γ ma najmniejszą i największą, symetryczną PSNE.

Najmniejsza i największa symetryczna równowaga Nasha może być jednym równowagowym profilem strategii. Interpretacja twierdzenia 4.1 przebiega analogicznie do jego dowodu. Rozpatrzmy przeformułowanie gry Γ w taki sposób, że każdy z graczy zamiast strategii a^i wybiera optymalną wielkość agregatu, wiedząc, jaka byłaby wielkość agregatu, gdyby wybrał taką samą strategię jak pozostali gracze $q = Q(a^1, a^2, \dots, a^I)$. Przyjęte w twierdzeniu założenia nie gwarantują monotoniczności odwzorowań najlepszej odpowiedzi Ψ^i , ale zapewniają monotoniczność najlepszej odpowiedzi w grze z tak przeformułowanymi strategiami. Dzięki temu przeformułowaniu możliwe jest zastosowanie twierdzeń o punktach stałych dla odwzorowań niemalejących. Dalsza część dowodu polega właśnie na wykorzystaniu uogólnienia (dla odwzorowań) twierdzenia Tarskiego o punkcie stałym przez Veinott (1992) oraz Zhou (1994).

Na tym etapie warto podkreślić, że wyniki twierdzenia 4.1 różnią się od wyników prac omówionych w rozdziale trzecim. Po pierwsze, w przeciwieństwie do założeń Kukushkina (1994a) warunki przyjęte w twierdzeniu nie wymagają rozdzielnosci preferencji względem dobra prywatnego ani agregatu. Dodajmy, że warunki „konieczne” istnienia równowagi Nasha z pracy Kukushkina nie mają tutaj bezpośredniego zastosowania, gdyż zarówno funkcja użyteczności, jak i agregująca mają dodatkowe, nieanalizowane przez niego własności. Po drugie w przeciwieństwie do założeń z pracy Dubey, Haimanko i Zapechelnyuka (2006) warunki twierdzenia 4.1 nie zakładają istnienia ciągłej (ani nawet półciągłej z góry) funkcji wybranej z odwzorowania najlepszej odpowiedzi, a ponadto dopuszczają szerszą klasę agregatów nieaddytywnych. Po trzecie warunki w twierdzeniu 4.1 mają intuicyjną interpretację ekonomiczną: malejące przyrosty użyteczności pomiędzy nakładem a agregatem oznaczają komplementarność w rozumieniu Samuelsona dóbr prywatnych i publicznych, a rosnące przyrosty agregatu oznaczają komplementarność nakładów w jego produkcji⁹. Innymi słowy w przeciwieństwie do części wyników literatury (np. Kukushkin 1994a) warunki nałożone w twierdzeniu łatwo sprawdzić. Po czwarte, choć użyte w dowodzie uogólnienie twierdzenia Tarskiego nie jest konstruktywne, to są znane jego konstruktywne uogólnienia (por.

⁷ Weźmy X i T będące zbiorami częściowo uporządkowanymi oraz f , będącą rzeczywistą funkcją określoną na $S \subset X \times T$. Jeżeli $f(x, s) - f(x, t)$ jest izotoniczna (antytoniczna, ściśle izotoniczna, ściśle antytoniczna) ze względu na x w $S_s \cap S_t$ dla każdych $t < s$ w T , to f ma rosnące przyrosty (malejące przyrosty, ściśle rosnące przyrosty, ściśle malejące przyrosty) ze względu na (x, t) w S .

⁸ Grę: $\Gamma = (N, \{A^i, D^i\}_{i \in N})$, gdzie $N = \{1, 2, \dots, I\}$ to zbiór graczy, A^i zbiór strategii, a $D^i : \times_{i \in N} A^i \times \Theta \rightarrow \Re$ wypłata i -tego gracza, nazywamy symetryczną, gdy gracze mają takie same zbiory strategii $A^1 = A^2 = \dots = A^I$ i wypłaty spełniają zależność: $D^i(a^1, \dots, a^I) = D^{\sigma(i)}(a^{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a^{\sigma^{-1}(I)})$ dla każdego i , każdego $a \in A \equiv \times_i A^i$ i każdej permutacji σ zbioru N .

⁹ Krańcowa użyteczność z konsumpcji dobra prywatnego nie maleje zatem wraz ze wzrostem konsumpcji dobra publicznego, a krańcowa produktywność nakładów poszczególnych graczy nie maleje wraz z nakładami pozostałych graczy.

Amann 1967). Ich zastosowanie umożliwia zaproponowanie metody numerycznej, pozwalającej na obliczenie poszukiwanych punktów stałych (por. Topkis 1998, rozdz. 4.3), tj. równowag Nasha. Jest to szczególnie istotne w wypadku próby zastosowania tych wyników do analiz empirycznych i także odróżnia otrzymane wyniki od znanych z prac Kukushkina czy Dubey, Haimanko i Zapechelnyuka, opartych na argumentach topologicznych, a nie porządkowych. Pamiętajmy także, że rezygnując z założenia o funkcji agregacji (produkcji) w postaci sumy nakładów poszczególnych graczy, tracimy wnioski co do istnienia jedynej równowagi Nasha, jak też jej symetryczności (por. np. Bergstrom, Blume, Varian 1986). Zaznaczmy też, że twierdzenie 4.1 mówi o równowagach symetrycznych w grach symetrycznych, co jest niewątpliwie ograniczeniem jego zastosowania.

W kolejnych twierdzeniach podamy charakterystykę struktury zbioru równowag Nasha dla analizowanych gier. Zgodnie z metodą przedstawioną przez Topkisa (1995) poniższy warunek podaje założenia gwarantujące, że gra Γ będzie submodularna¹⁰. Łącząc wyniki lematu z tezami twierdzeń 4.2–4.4, otrzymamy charakterystykę zbioru PSNE dla klasy gier (ściśle) submodularnych.

Lemat 4.1. Jeżeli dla każdego $i \in N$ wklęsła z q funkcja F^i ma malejące przyrosty z (a^i, q) , a funkcja Q ma malejące przyrosty dla każdej pary (a^i, a^j) , $\forall j \neq i$, wtedy D^i ma malejące przyrosty dla każdej pary (a^i, a^j) , $\forall j \neq i$, a Γ jest grą submodularną. Jeżeli choć jedna z własności hipotezy jest ściśła, wtedy Γ jest grą ściśle submodularną.

Dowód lematu pomijamy, gdyż jest on prostym zastosowaniem wyników z pracy Topkisa (1998). Warunki submodularności gry Γ mają intuicyjną interpretację ekonomiczną. Po pierwsze malejące przyrosty użyteczności F^i zapewniają komplementarność dobra publicznego i prywatnego oraz stwarzają zachętę do obniżenia własnych nakładów na produkcję dobra publicznego w reakcji na wzrost nakładów pozostałych graczy. Po drugie wklęsłość funkcji użyteczności F^i względem dobra publicznego powoduje, że jego krańcowa użyteczność jest malejąca, co znów skłania do obniżenia własnych nakładów a^i w reakcji na wzrost nakładów pozostałych graczy. Po trzecie malejące przyrosty funkcji agregacji powodują, że krańcowa produktywność nakładów jednostki nie rośnie wraz z nakładami pozostałych graczy. Po połączeniu tych trzech efektów optymalne wybory nakładów a^i są substytucyjne względem siebie, a odwzorowania najlepszej odpowiedzi są nierosnące w silnym porządku Veinott (Veinott 1992).

Ponieważ submodularność funkcji implikuje jej quasi-submodularność, a submodularność (ani warunki hipotezy lematu 4.1) nie jest konieczna do tego, aby gra Γ była (ściśle) quasi-submodularna, twierdzenia charakteryzujące zbiór równowag Nasha podamy bezpośrednio dla quasi-submodularnej gry Γ .

¹⁰ Niech S będzie kratą, a $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$. Jeśli dla każdych $x, y \in S$ zachodzi:

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \leq f(x) + f(y),$$

to f jest submodularna na S . Jeśli nierówność jest ostra dla wszystkich nieuporządkowanych x i y , to f jest ściśle submodularna. Gra $\Gamma = (N, \{A^i, D^i\}_{i \in N})$ jest (ściśle) submodularna, jeżeli dla każdego gracza $i \in N$:

- 1) A^i jest kratą zupełną,
- 2) $D^i : \times_{j \in N} A^j \rightarrow \mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ jest półciągła z góry względem porządku A^i w (dla ustalonego a^{-i}),
- 3) D^i jest (ściśle) submodularna z a^i (dla ustalonego a^{-i}),
- 4) D^i ma (ściśle) malejące przyrosty względem a^i i a^{-i} .

Twierdzenie 4.2 (o nieuporządkowaniu równowag). Jeżeli quasi-submodularna¹¹ gra Γ ma ściśłą PSNE, wtedy nie ma innej PSNE, która jest w stosunku do niej uporządkowana¹². Jeżeli Γ jest ściśle quasi-submodularna, wtedy nie ma uporządkowanych PSNE.

Bezpośrednio z twierdzenia 4.2 otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 4.1 (o równowagach symetrycznych). Quasi-submodularna gra Γ ma najwyżej jedną symetryczną, ściśłą PSNE. Ściśle quasi-submodularna gra Γ ma najwyżej jedną symetryczną PSNE.

Twierdzenie 4.2 i wniosek 4.1 wynikają bezpośrednio z faktu, że dla gier (ściśle) quasi-submodularnych odwzorowania najlepszej odpowiedzi są (malejące) nierosnące w silnym porządku Veinott (1992). Twierdzenie 4.2 implikuje także, że jeżeli (ściśła) gra quasi-submodularna ma więcej niż jedną równowagę Nasha, wtedy muszą występować (nieuporządkowane w stosunku do niej) równowagi asymetryczne. Występowanie takich równowag, nawet w grze symetrycznej, jest możliwe, gdy odwzorowanie najlepszej odpowiedzi ma więcej niż jedno rozwiązanie dla jednej wartości agregatu q , a ponadto asymetryczne wybory a^i odpowiednio kształtują wielkość q . Twierdzenie 4.2 oraz wniosek 4.1 pozostają w mocy także dla agregatu będącego jedynie niemalejącą funkcją a . Ponadto gdy odwzorowanie najlepszej odpowiedzi będzie funkcją (tj. funkcja wypłaty będzie odpowiednio wklęsła), wtedy wniosek z twierdzenia 4.2 pozostaje w mocy nawet dla założenia o PSNE, czy quasi-submodularności. Wynik ten otrzymujemy, stosując np. stwierdzenie 1.1 autorstwa Dacić (1979) odnośnie do punktów stałych dla funkcji malejących.

Rozważania na temat struktury zbioru równowag Nasha kontynuujemy, podając obserwacje uporządkowania wypłat w PSNE (twierdzenie 4.3) oraz uporządkowaniu PSNE w sensie Pareta (twierdzenie 4.4) i ich ekonomiczną interpretację.

Twierdzenie 4.3 (o uporządkowaniu wypłat w równowadze asymetrycznej). W asymetrycznej PSNE (a^i, a^{-i}) symetrycznej gry Γ wypłaty graczy są uporządkowane poziomem a^i , tj. $F(\min_i a^i, \cdot) \geq \dots \geq F(\max_i a^i, \cdot)$, z przynajmniej jedną nierównością ostrą.

Podkreślimy, że spełnienie warunku symetryczności gry Γ jest konieczne do otrzymania tego wyniku. Bez tego założenia, nawet w przypadku jednakowych preferencji wszystkich gospodarstw nie jesteśmy w stanie utrzymać w mocy powyższego twierdzenia ze względu na potencjalne różnice dochodów oraz potencjalną nieliniowość optymalnej a^i względem w^i .

Twierdzenie 4.4 (o nieuporządkowaniu równowag w sensie Pareta). Jeżeli ściśle quasi-submodularna gra Γ dla $I = 2$ ma więcej niż jedną PSNE, wtedy nie są one uporządkowane w sensie Pareta. Jeżeli ściśle quasi-submodularna gra Γ ma więcej niż jedną PSNE z tą samą wartością agregatu, wtedy równowagi te nie są uporządkowane w sensie Pareta.

¹¹ Niech X będzie kratą. Powiemy, że $f: X \rightarrow \mathfrak{R}$ jest quasi-supermodularna, jeżeli $x, y \in X$ zachodzi $f(x) > f(x \wedge y) \Rightarrow f(x \vee y) > f(y)$ oraz $f(x) \geq f(x \wedge y) \Rightarrow f(x \vee y) \geq f(y)$. Jeżeli ostatnia nierówność jest ostra, to własność jest ściśła. Jeżeli natomiast $f(x) > f(x \wedge y) \Rightarrow f(x \vee y) \geq f(y)$, to własność jest słaba. Funkcje (ściśle, słabo) quasi-submodularne definiujemy analogicznie. Gra $\Gamma = (N, \{A^i, D^i\}_{i \in N})$ jest (ściśle) quasi-submodularna, jeżeli dla każdego gracza $i \in N$:

- 1) A^i jest kratą zupełną,
- 2) $D^i: \times_{j \in N} A^j \rightarrow \mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ jest półciągłą z góry względem porządku w A^i (dla ustalonego a^{-i}),
- 3) D^i jest (ściśle) quasi-submodularna po a^i (dla ustalonego a^{-i}),
- 4) D^i spełnia (ściśle) warunek odwrotny jednokrotnego przecięcia pomiędzy a^i i a^{-i} .

¹² Względem standardowego porządku w $\mathfrak{R}^I$, a więc porządku po współrzędnych na zbiorze strategii $\times_{i=1}^I A^i$.

Pytanie, czy intuicyjna obserwacja zawarta w twierdzeniu 4.4, o nieuporządkowaniu PSNE w sensie Pareta dla quasi-submodularnej gry Γ , jest prawdziwa dla $I > 2$, pozostaje bez odpowiedzi.

Interpretacja powyższych wyników jest intuicyjna. Strategiczna substytucyjność wpisana w gry z agregatem publicznym wyklucza uporządkowane profile strategii równowagowych. W konsekwencji może istnieć najwyżej jedna równowaga symetryczna analizowanej gry. Wskazuje to, że spotykane w literaturze ekonomicznej wyniki dotyczące tzw. błędów koordynacji nie mają zastosowania w przypadku gier z substytucyjną podażą dóbr publicznych. Innymi słowy analizowana gospodarka może się znaleźć w jednej z potencjalnie wielu równowag asymetrycznych, jednak nie muszą one być uporządkowane w rozumieniu Pareta. Obserwacje te silnie odróżniają klasę gier z substytucyjnością strategii od gier z ich komplementarnością (por. Amir, Jakubczyk, Knauff 2008). Kolejną cechą rozróżniającą obie klasy gier jest brak symetrycznych wyników na temat statyki komparatywnej. W przypadku gier z substytucyjnymi strategiami monotoniczna zmiana parametrów gry może bowiem prowadzić do „monotonicznego przesunięcia zbioru” równowag, jak również do przesunięcia uniemożliwiającego takie porównania (por. Sunanda, Sabarwal 2008).

Na zakończenie zaznaczmy, że występowanie pozytywnych efektów zewnętrznych zwiększenia podaży dobra publicznego sugeruje, iż alokacje odpowiadające równowadze Nasha nie muszą być optymalne w rozumieniu Pareta. Zależność ta występuje także w grach analizowanych w niniejszym artykule. Z drugiej strony można wykazać, że rozwiązania optymalne w sensie Pareta (poza szczególnymi wypadkami) nie są równowagami Nasha. Ze względu na fakt, że zależności te są znane, zainteresowanego czytelnika odsyłamy do literatury przedmiotu.

Powyższe rozważania na temat istnienia i struktury równowag Nasha (a także statyki komparatywnej; por. Woźny 2008) można zastosować np. do gier analizowanych w pracach: Cornesa (1993) lub Dubey, Haimanko, Zapechelnyuka (2006).

Przykład 4.1. Za Dubey, Haimanko, Zapechelnyuk (2006) rozpatrzmy problem indywidualnej podaży nakładów na realizację projektu przynoszącego wspólny zysk jego uczestnikom. Niech funkcja wypłaty przyjmuje wartości postaci $F^i(a^i, Q) = Q - c_i(a^i)$, gdzie c_i to funkcja opisująca koszty nakładu i -tego gracza, a agregat cechuje się komplementarnością nakładów, a w drugim przykładzie substytucyjnością.

Twierdzenia Kukushkina (1994a) oraz Dubey, Haimanko, Zapechelnyuka (2006) wskazują, że taka gra ma równowagę Nasha, natomiast wyniki uzyskane w niniejszej pracy charakteryzują dodatkowo zbiór równowag tej gry dla wypadku substytucyjności agregatu – w szczególności otrzymujemy: nieuporządkowanie równowagowych profili strategii oraz istnienie najwyżej jednej równowagi symetrycznej. Twierdzenie 4.1 z niniejszej pracy pozwala uwzględnić w wynikach komplementarność agregatu oraz preferencje ogólnej postaci: $F^i(a^i, Q)$, o ile spełniają przyjęte w pracy założenia co do monotoniczności jej przyrostów.

5. Gospodarka dynamiczna i główne wyniki

Rozpatrzmy sytuację, w której każde (i -te) z I (gdzie $N = \{1, 2, \dots, I\}$) gospodarstw domowych, znając stan początkowy, podejmuje decyzję maksymalizującą zdyskontowaną na dziś użyteczność ze strumienia konsumpcji prywatnej i agregatu publicznego:

$$\sup_{(a_t^i)_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^\infty \beta^t F^i(a_t^i, q_t) \quad (2)$$

wiedząc, że dynamika agregatu zależy także od decyzji pozostałych graczy. Przez $a_t^i \in A$ oznaczmy podaż nakładów na produkcję dobra publicznego gospodarstwa $i \in N$ w okresie t , a przez $a_t = (a_t^1, a_t^2, \dots, a_t^I) = (a_t^i, a_t^{-i})$ profil nakładów I graczy. Funkcja g opisuje dynamikę agregatu: $q_{t+1} = g(a_t, q_t)$, a q_0 jest dane. Dalej przyjmujemy następujące założenia odnośnie do funkcji F^i i g :

Założenie 5.1 (preferencje i agregat) zachodzi:

- $A = [0, \bar{a}] \subset \mathfrak{R}$ oraz $\mathbf{Q} = [\underline{Q}, \bar{Q}] \subset \mathfrak{R}_+$,
- $(\forall i \in N) F^i : A \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathfrak{R}$ klasy $\mathbf{C}^2$, jest malejąca z a^i i rosnąca z q oraz $(\forall q \in \mathbf{Q})(\forall a^i \in A) F^i(a^i, q) = F^j(a^i, q) \equiv F(a^i, q)$,
- $(\forall q \in \mathbf{Q}) \lim_{a \rightarrow \bar{a}} F(a, q) = \infty$,
- $g : A^I \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ klasy $\mathbf{C}^2$ jest rosnąca z każdym argumentem.

Zdefiniujmy symetryczną, dynamiczną gospodarkę wielu podmiotów w warunkach pewności, oznaczając ją przez: $\mathbf{G}_{MDP} = (N, F, A, \beta, g, \mathbf{Q}, \theta, w)$, gdzie parametry θ są definiowane tak jak w poprzedniej części artykułu.

Przystąpimy teraz do definicji gry Γ^D , za pomocą której będziemy analizować równowagi i dynamikę gospodarki $\mathbf{G}_{MDP}$. Niech $H_t = \{q_0, a_0, \dots, q_{t-1}, a_{t-1}\}$ oznacza historię do okresu t , a H_t oznacza zbiór wszystkich historii rozpoczętych z q_0 do okresu t . Dla każdego $i \in N$ ciąg funkcji $\eta^i = (\eta_t^i)_{t=0}^\infty$ nazwiemy strategią gracza i , gdzie dla każdego okresu t , η_t^i określa decyzję o poziomie a_t^i jako funkcję historii H_t . Mówimy, że strategia η^i jest strategią Markowa, jeżeli $(\forall t) \eta_t^i$ jest funkcją jedynie zmiennej q_t . Strategia Markowa jest stacjonarna, jeżeli $(\forall t, k) \eta_t^i = \eta_k^i \equiv \bar{\eta}^i$.

Niech η^{-i} oznacza strategię graczy innych niż i . Biorąc pod uwagę zależności wynikające ze strategii pozostałych uczestników gry, każdy z graczy rozwiązuje problem maksymalizacyjny (2), w którym wybrane strategię określają ciąg decyzji $(a_t^i)_{t=0}^\infty$ i dynamikę $(q_t)_{t=0}^\infty$.

Następnie skoncentrujemy się na poszukiwaniu równowag Nasha gry Γ^D . Aby skorzystać z metod programowania dynamicznego oraz wykluczyć równowagi Nasha oparte na tzw. groźbach bez pokrycia (*empty threats*), ograniczmy się¹³ do analizy równowag Markowa doskonałych ze względu na podgry (MPNE).

Definicja 5.1 (równowagi PSNE, SPNE i MPNE). Równowagą Nasha (PSNE) gry Γ^D jest profil strategii $(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^I)$ taki, że dla każdego gracza $i \in N$ strategia η^i rozwiązuje problem (2), traktując η^{-i} jako dane. Niech $\eta^i(t, H_t)$ oznacza kontynuację strategii η^i od momentu t przy danej historii $H_t \in H_i$. Wtedy PSNE $(\eta^i)_{i \in N}$ jest równowagą doskonałą ze względu na podgry (SPNE), jeżeli dla każdego t i H_t profil strategii $(\eta^i(t, H_t))_{i \in N}$ jest PSNE gry rozpoczętej od okresu t . SPNE jest strategią Markowa doskonałą ze względu na podgry (MPNE), gdy dodatkowo strategię graczy w każdym okresie t są jedynie funkcjami zmiennej stanu q_t .

Ze względu na trudności związane z analizą równowag asymetrycznych ograniczymy się do poszukiwania stacjonarnych, symetrycznych równowag typu MPNE. W tym wypadku problem maksymalizacyjny możemy sprowadzić do równania Bellmana postaci:

¹³ Ograniczenie się do analizy strategii Markowa pozwala na uniknięcie problemów interpretacyjnych wynikających z zastosowania strategii *open-loop*, które w analizowanym modelu nie mają uzasadnienia.

$$V_{\bar{\eta}}(q) = \max_{a \in A} \{F(a, q) + \beta V_{\bar{\eta}}(g(a, \underbrace{\bar{\eta}, \dots, \bar{\eta}}_{I-1}, q))\}, \quad (3)$$

gdzie $V_{\bar{\eta}}$ to funkcja wartości od stanu q przy założeniu, że pozostali gracze wybierają strategię $\bar{\eta}$. Niech $\Psi_{\bar{\eta}}: \mathbf{Q} \Rightarrow A$, gdzie $\Psi_{\bar{\eta}}(q) = \{a \in A : V_{\bar{\eta}} = F(a, q) + \beta V_{\bar{\eta}}(g(a, \bar{\eta}, \dots, \bar{\eta}, q))\}$, będzie odwzorowaniem (przy założeniu, że pozostali gracze stosują strategię $\bar{\eta}$) z własnością, iż stacjonarna strategia jest rozwiązaniem problemu maksymalizacyjnego (2) wtedy i tylko wtedy, gdy jest (mierzalnym) wyborem z $\Psi_{\bar{\eta}}$.

Analogicznie do poprzedniej części modyfikujemy dowód przedstawiony w pracy Sundaram (1989a, 1989b) i łączymy go z metodą prezentowaną w pracy Amir (1989) oraz wykorzystujemy agregatowy charakter dobra publicznego. Otrzymujemy wówczas poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5.1. Niech funkcja F ma rosnące przyrosty z (a, q) oraz jest wklęsła na A . Niech ponadto $(\forall i \neq j)(\forall q \in \mathbf{Q})$ funkcja g ma rosnące przyrosty z przedziału (a^i, a^j) oraz $(\forall i \in N), (\forall i \neq j)$ i ustalonych a^i rosnące przyrosty z (a^i, q) . Jeżeli przynajmniej jedna z własności rosnących przyrostów jest ścisła, wtedy istnieje symetryczna MPNE gry Γ^D . Profile strategii są w wypadku tej równowagi niemalejącymi i półciągłymi z góry funkcjami q .

Twierdzenie 5.1 mówi, że w warunkach komplementarności nakładów graczy oraz komplementarności nakładów i agregatu w technologii akumulacji oraz substytucyjności dóbr w preferencjach U istnieje monotoniczny, symetryczny profil strategii równowagowych. Rola poszczególnych założeń w twierdzeniu jest podobna do roli założeń w twierdzeniu 4.1, przeniesionych jedynie na wypadek dynamiczny. Podkreślimy: nawet w tak skomplikowanym środowisku decyzyjnym otrzymujemy relatywnie słabe warunki na ten dość intuicyjny wniosek, wynikający ze sprzężenia własności agregatu i decyzji graczy.

Substytucyjność (preferencje F i nakłady w g) nie jest symetryczna pod względem wyników m.in. dlatego, że jeżeli gracze używają strategii nierosnących z q , to wpływ wzrostu q na wielkość agregatu w następnym okresie przejawia się dwójako: w postaci bezpośredniego wpływu q na g i pośredniego (przeciwstawnego co do znaku) wpływu q przez η na g . W konsekwencji bez przyjęcia konkretnej postaci funkcyjnej nie jesteśmy w stanie podać wyników dla gry Γ^D w wypadku substytucyjności preferencji.

Na tym etapie warto porównać otrzymany wynik z innymi wynikami znanymi z literatury. Nawiązując do rozdziału trzeciego, przypomnijmy, że wyniki z zakresu równowag doskonałych dla dynamicznych gier z podażą dóbr publicznych są nieliczne. Należy podkreślić ogólność stosowanych założeń, a więc i otrzymanych wyników. Trzeba też zwrócić uwagę na to, że stosowane założenia łatwo sprawdzić oraz intuicyjnie zinterpretować. Ponadto należy zaznaczyć, że wyniki twierdzenia 5.1. mogą mieć konstruktywny charakter.

Można zadać pytanie o dynamikę generowaną równowagowym profilem strategii: $q' = Z(q) := g(\tilde{\eta}(q), \dots, \tilde{\eta}(q), q)$, gdzie $(\tilde{\eta}, \dots, \tilde{\eta})$ to MPNE.

Twierdzenie 5.2. Niech profil $(\tilde{\eta}, \dots, \tilde{\eta})$ będzie MPNE gry Γ^D , jak w twierdzeniu 5.1, tj. zadaną przez półciągłe z góry i niemalejące funkcje zmiennej stanu. Wtedy funkcja Z , gdzie $Z(q) := g(\tilde{\eta}(q), \dots, \tilde{\eta}(q), q)$, ma najmniejszy i największy punkt stały (stan ustalony w słabym

sensie¹⁴). Ponadto ciąg generowany równaniem $(\forall t \geq 0) q_{t+1} = Z(q_t)$, gdzie $q_0 = \bar{Q}$, jest nierosnący i zbieżny do największego punktu stałego (stanu ustalonego w słabym sensie).

Interpretację wyników twierdzenia 5.2 pozostawiamy czytelnikowi. Zwróćmy jedynie uwagę na konstruktywne własności jego wyników. Wniosek o monotonicznej zbieżności do największego stanu ustalonego wynika z półciągłości z góry optymalnej polityki, a więc i $Z(q)$. Ze względu na nieciągłość polityki dynamika zadana Z od $\underline{Q}$ nie musi jednak zbiegać do minimalnego stanu ustalonego. Analogiczne rozumowanie dotyczące istnienia stanów ustalonych i zbieżności zmiennej stanu nie musi się sprawdzać w wypadku nierosnącej równowagowej (o ile istnieje) polityki Markowa ze względu na możliwą nieciągłość dynamiki zmiennej stanu. W wypadku malejących strategii występowanie przeciwnego wpływu q na wielkość q' dodatkowo utrudnia analizę na tym poziomie ogólności. Łatwo wykazać, że poza szczególnymi wypadkami równowagowe alokacje dóbr w analizowanej grze nie są optymalne w sensie Pareta.

6. Wnioski

Podsumowując pokrótce otrzymane wyniki, rozpoczniemy od wypadku gry statycznej. Dla ogólnych klas preferencji i agregacji dobra publicznego podano warunki (por. twierdzenie 4.1) istnienia symetrycznej równowagi Nasha w symetrycznej grze Γ dla wypadku komplementarności preferencji względem dobra publicznego i prywatnego, wklęsłości funkcji użyteczności względem dobra prywatnego oraz komplementarności nakładów w technologii produkcji dobra publicznego. Dalej wykazano (por. twierdzenie 4.2), że ściśle quasi-submodularna gra z dobrem publicznym nie może mieć uporządkowanych, względem porządku po współrzędnych na zbiorze strategii, równowag Nasha. Gra quasi-submodularna może mieć uporządkowane równowagi Nasha, choć już nie ściśle równowagi Nasha. W konsekwencji ściśle quasi-submodularna gra dla dwóch graczy nie może mieć uporządkowanych równowag w sensie Pareta (por. twierdzenie 4.4). Warunkami strategicznej substytucyjności, a więc (quasi-)submodularności gry są: komplementarność preferencji, substytucyjność nakładów produkcji dobra publicznego oraz malejąca użyteczność krańcowa dla dobra publicznego. Dodajmy, że ze względu na występowanie efektów zewnętrznych wewnętrzne równowagi Nasha nie są optymalne w sensie Pareta.

W odniesieniu do wypadku dynamicznego rozpatrzono model optymalnej podaży nakładów na dobro publiczne w strategiach Markowa, doskonałych ze względu na podgry. Dla ogólnych klas preferencji i dynamiki dobra publicznego: w wypadku substytucyjności preferencji między dobrem prywatnym a publicznym oraz komplementarności produkcji, otrzymujemy wyniki dotyczące istnienia symetrycznej równowagi MPNE ze strategiami półciągłymi z góry, niemalejącymi względem q (por. twierdzenie 5.1). Wyniki (twierdzenie 5.2) odnoszące się do dynamiki gospodarki przy tak zadanej polityce opisują także możliwą równowagową ścieżkę redukcji poziomu dobra publicznego.

Dodajmy, że przedstawione w pracy wyniki znajdują zastosowanie w sytuacjach *stricte* ekonomicznych, np. w przypadku:

¹⁴ Stanem ustalonym w słabym sensie nazywamy taki poziom zmiennej stanu, dla którego istnieje polityka (selekcja) gwarantująca pozostanie w tym stanie.

1) dobrowolnego finansowania budowy dóbr użyteczności publicznej;
 2) wyników pracy grupowej nad projektami w warunkach substytucyjności wysiłku i zadań;
 3) zanieczyszczania wspólnych zasobów (jezior, lasów, łąk) przez grupę podmiotów (gospodarstw domowych lub przedsiębiorstw); w pracy Woźnego (2008) przeanalizowano, jak przedstawione wyniki z zakresu gier z substytucyjnością strategii mogą być użyte do poszerzenia wyników literatury z dziedziny biologii i ekonomii na temat optymalnej ilości fosforu w płytkich jeziorach.

Na koniec omówimy możliwości rozszerzenia wyników opracowania. Przedstawione wnioski prowadzą bowiem do dalszych pytań badawczych. Przykładowo rozwiązanie kwestii warunków koniecznych do wystąpienia wielu równowag w analizowanym modelu pozwoliłoby wyeliminować wiele trudnych do analizy zagadnień, związanych np. ze statyką i dynamiką komparatywną. Pamiętajmy bowiem, że monotoniczna zmiana parametrów gier z substytucyjnymi strategiami może prowadzić zarówno do monotonicznego przesunięcia zbioru równowag, jak i do jego przesunięcia uniemożliwiającego takie porównania (por. Sunanda, Sabarwal 2008).

Dodajmy także, że rezygnacja z metody analizy cząstkowej na rzecz równowagi ogólnej ze strategicznymi zależnościami pozwoli poznać rolę efektu dochodowego (tj. zmiany cen dóbr na dochód gospodarstw) oraz mechanizm kształtowania się cen dóbr publicznych na skutek wyborów podmiotów (por. np. Villanaccia, Zenginobuz 2005). Wspomniane jedynie możliwości numerycznego poszukiwania równowag danej gospodarki rodzą potrzebę dalszych badań teoretycznych i empirycznych. Jest to szczególnie istotne w przypadku weryfikacji wyników teoretycznych za pomocą danych empirycznych, jak też prób prognozowania zachowań. Dotychczasowe wyniki przedstawione w literaturze omówionej w rozdziale trzecim nie opierają się na metodach konstruktywnych. W konsekwencji (poza szczególnym wypadkiem istnienia jednej równowagi) nie tylko nie pozwalają na porównanie wyników modeli teoretycznych z empirią, ale także nie wskazują numerycznych metod jej obliczania i szacowania otrzymanych błędów.

Wyniki otrzymane w pracy opierają się na założeniu istnienia funkcji agregującej oraz strategicznej substytucyjności i przez to nie mają bezpośredniego zastosowania do klas gier niewpisujących się w tę strukturę.

Bibliografia

- Amir R. (1989), A lattice-theoretic approach to a class of dynamic games, *Computers and Mathematical with Applications*, 17(8–9), 1345–1349.
- Amir R., Jakubczyk M., Knauff M. (2008), Symmetric versus asymmetric equilibria in symmetric supermodular games, *International Journal of Game Theory*, 37(3), 307–320.
- Amir R., Lambson V. E. (2000), On the effects of entry in Cournot markets, *Review of Economic Studies*, 67(2), 235–54.
- Amann H. (1976): Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Review*, 18(4), 620–709.
- Berge C. (1997), *Topological spaces. Including a treatment of multi-valued functions, vectors spaces and convexity*, Dover Publications, Inc., New York.
- Bergstrom T., Blume L., Varian H. (1986), On the private provision of public goods, *Journal of Public Economics*, 9(1), 25–49.

- Bergstrom T., Blume L., Varian H. (1992), Uniqueness of Nash equilibrium in private provision of public goods: an improved proof, *Journal of Public Economics*, 49(3), 389–390.
- Bliss C., Nalebuff B. (1984), Dragon-slaying and balroom dancing: the private supply of a public good, *Journal of Public Economics*, 25(1–2), 1–12.
- Bulo J., Geanakoplos J., Klemperer P. (1985), Multimarket oligopoly: strategic substitutes and complements, *Journal of Political Economy*, 93, 488–511.
- Cornes R. (1993), Dyke maintenance and other stories: some neglected types of public goods, *Quarterly Journal of Economics*, 108(1), 259–71.
- Cornes R., Hartley R. (2007), Aggregative public good games, *Journal of Public Economic Theory*, 9(2), 201–219.
- Cornes R., Hartley R., Sandler T. (1999), Equilibrium existence and uniqueness in public good models: an elementary proof via contraction, *Journal of Public Economic Theory*, 1(4), 499–509.
- Dacić R.M. (1979), Fixed points of antitone mappings in conditionally complete partially ordered sets, *Publications De L'Institut Mathématique*, 40(30), 83–90.
- Dasgupta P., Stiglitz J.E. (2003), *The Economics of Non-Convex Ecosystems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Dubey P., Haimanko O., Zapechelnyuk A. (2006), Strategic complements, substitutes and potential games, *Games and Economic Behavior*, 54(1), 77–94.
- Fraser C. (1992), The uniqueness of Nash equilibrium in the private provision of public goods: an alternative proof, *Journal of Public Economics*, 49, 389–390.
- Fudenberg D., Tirole J. (2002), *Game theory*, MIT Press, Cambridge.
- Hirshleifer J. (1983), From the weakest-link to best-shot: The voluntary provision of public goods, *Public Choice*, 41, 371–386.
- Kremer M. (1993), The O-Ring Theory of Economic Development, *Quarterly Journal of Economics*, 108(3), 551–575.
- Kukushkin N.S. (1994a), A condition for the existence of a Nash equilibrium in games with public and private objectives, *Games and Economic Behavior*, 7, 177–192.
- Kukushkin N.S. (1994b), A fixed-point theorem for decreasing mappings, *Economic Letters*, 46, 43–26.
- Leininger W. (1986), The existence of perfect equilibria in model of growth with altruism between generations, *Review of Economic Studies*, 53(3), 349–368.
- Milgrom P., Roberts J. (1990), The economics of modern manufacturing: technology, strategy, and organization, *American Economic Review*, 80(3), 511–528.
- Milgrom P., Shannon C. (1994), Monotone comparative statics, *Econometrica*, 62(1), 157–180.
- Sunanda R., Sabarwal T., (2008), On the (non-)lattice structure of the equilibrium set in games with strategic substitutes, *Economic Theory*, 37, 161–169.
- Samuelson P.A. (1954), The pure theory of public expenditures, *Review of Economic and Statistics*, 36(4), 387–389.
- Samuelson P.A. (1974), Complementarity: an essay on the 40th anniversary of the Hicks-Allen revolution in demand theory, *Journal of Economic Literature*, 12(4), 1255–1289.
- Scheffer M. (1997), *Ecology of shallow lakes*, Chapman and Hall, New York.
- Sundaram R. K. (1989a), Perfect equilibrium in non-randomized strategies in a class of symmetric dynamic games, *Journal of Economic Theory*, 47(1), 153–177.

- Sundaram R.K. (1989b), Perfect equilibrium in non-randomized strategies in a class of symmetric dynamic games: corrigendum, *Journal of Economic Theory*, 49, 358–387.
- Topkis D.M. (1968), *Ordered optimal solutions*, Ph.D. thesis, Stanford University.
- Topkis D.M. (1995), Comparative statics of the firm, *Journal of Economic Theory*, 67, 370–401.
- Topkis D.M. (1998), *Supermodularity and complementarity*, Princeton University Press.
- Veinott A. (1992), *Lattice programming: qualitative optimization and equilibria*, Stanford University.
- Villanaccia A., Zenginobuz U. (2005), Existence and regularity of equilibria in a general equilibrium model with private provision of a public good, *Journal of Mathematical Economics*, 41, 617–636.
- Watts A. (1996), On the uniqueness of equilibrium on Cournot oligopoly and other games, *Games and Economic Behavior*, 13, 269–285.
- Woźny Ł. (2008), *Modelowanie strategicznych współzależności decyzyjnych w obszarze dóbr publicznych*, praca doktorska, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.
- Zhou L. (1994), The set of Nash equilibria of a supermodular game is a complete lattice, *Games and Economic Behavior*, 7, 295–300.

Aneks

Lemat 1. Niech X, Y będą łańcuchami. Malejąca z pierwszym i rosnąca z drugim argumentem funkcja $b: X \times Y \rightarrow \mathfrak{R}_+$ cechuje się malejącymi przyrostami. Malejąca z pierwszym argumentem i rosnąca z drugim funkcja $F: \mathfrak{R}_+ \times Y \rightarrow \mathfrak{R}$ ma malejące przyrosty oraz jest wklęsła z pierwszym argumentem. Wtedy $F(b(x, y), y)$ ma rosnące przyrosty z (x, y) .

Dowód lematu 1. Niech $x' > x, y' > y$ należą do odpowiednich zbiorów. Wtedy zachodzi¹⁵:

$$\begin{aligned} & F(b(x', y'), y') + F(b(x, y), y) - F(b(x', y), y) - F(b(x, y'), y') = \\ & = [F(b(x', y'), y') - F(b(x', y'), y) + b(x, y) - b(x', y), y')] - [F(b(x', y), y') - F(b(x, y), y')] + \\ & + [F(b(x', y') + b(x, y) - b(x', y), y')] - F(b(x, y'), y')] + \\ & - [F(b(x, y), y') - F(b(x', y), y') + F(b(x', y), y) - F(b(x, y), y)] \geq 0 \end{aligned}$$

Wyrażenie w pierwszej linijce po znaku równości jest dodatnie ze względu wklęsłość F i jej antytoniczność z pierwszym argumentem. Wyrażenie w drugiej linijce jest dodatnie ze względu na antytoniczność F z pierwszym argumentem oraz malejące przyrosty b i monotoniczność b . Wyrażenie w trzeciej linijce jest dodatnie ze względu na monotoniczność b i malejące przyrosty F .

Dowód twierdzenia 4.1. Rozpatrzmy zbiór B taki, że:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : (\exists \hat{a} \in A) Q(\hat{a}, \tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = y, \text{ gdzie } Q(\tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = x\}.$$

Zauważmy, że skoro $\underline{Q} = Q(0, \dots, 0)$ oraz $\overline{Q} = Q(\bar{a}, \dots, \bar{a})$ i Q jest ciągła i rosnąca, to $(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists \tilde{a} \in A)$ taki, że $Q(\tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = x$. Niech $W: \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$, $W(x) = \{y \in B \mid x\}$. $W(x)$ jest rosnącą z x rodziną zbiorów. Ze względu na ciągłość Q zbiór $W(x)$ jest niepusty i zwarty dla każdego x . Zdefiniujmy: $b: B \rightarrow A, b(x, y) = \{a \in A: Q(a, \tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = y, \text{ gdzie } Q(\tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = x\}$.

¹⁵ Dowód przeprowadzamy według schematu zaproponowanego przez Topkisa (1995).

Z monotoniczności Q wynika, że jest to funkcja malejąca z pierwszym oraz rosnąca z drugim argumentem. Niech $Q(\tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = x$. Wtedy $b(x, \cdot) = B|_x \rightarrow A$ jest ciągła, ponieważ funkcja $Q(\cdot, \tilde{a}, \dots, \tilde{a}) : A \rightarrow B|_x$ jest ciągłą bijekcją, a zbiór A jest zwarty. Ponieważ Q ma rosnące przyrosty, jest monotoniczna i ciągła, wiemy, że:

$(\forall a'' > a \in A)(\forall \tilde{a}' > \tilde{a} \in A)(\exists a' \in A)$ takie, że $a'' \geq a' \geq a$, że:

$$Q(a'', \tilde{a}, \dots, \tilde{a}) - Q(a, \tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = Q(a', \tilde{a}', \dots, \tilde{a}') - Q(a, \tilde{a}', \dots, \tilde{a}').$$

Taka sama zmiana wartości Q może więc być osiągnięta w wyniku niższej zmiany a dla większych wyborów pozostałych graczy. Częściowa funkcja odwrotna do Q , tj. $b(x, \cdot) = B|_x \rightarrow A \subset \mathfrak{R}$, ma zatem malejące przyrosty z parą (x, y) .

Za pomocą funkcji b decyzję każdego gracza można sprowadzić do:

$$\max_{y \in W(x)} F(b(x, y), y)$$

Zauważmy, że maksymalizowana funkcja jest supermodularna z y i półciągła z góry względem y . Zastosujemy teraz wyniki lematu 1. W dowodzie lematu obliczamy wartość funkcji F dla pierwszego argumentu $b(x', y') + b(x, y) - b(x', y)$. Stosując lemat 1, musimy się więc upewnić, że argument jest dostępny, tj. $0 \leq b(x', y') + b(x, y) - b(x', y) \leq \bar{a}$. Otrzymujemy to na mocy malejących przyrostów b , jej monotoniczności oraz $b(\cdot, \cdot) \geq 0$; $0 < b(x, y) - b(x', y) \leq b(x', y') + b(x, y) - b(x', y) \leq b(x, y') \leq \bar{a}$. Funkcja $F(b(x, y), y)$ ma rosnące przyrosty między (x, y) .

Wiedząc, że Q jest zbiorem częściowo uporządkowanym, a $W(x)$ zwartym (por. Milgrom, Shannon 1994), a więc domkniętym łańcuchem dla każdego x , otrzymujemy na moc twierdzenia Topkisa (Topkis 1968), że dla każdego $x \in Q$ zbiór $\arg \max_{y \in W(x)} F$ jest niepustym, domkniętym łańcuchem, a ponadto jest niemalejący na Q (por. Veinott 1992). Niech $BR : Q \Rightarrow Q$, $BR(x) = \arg \max_{y \in W(x)} F(b(x, y), x)$. Stosując twierdzenie Veinotta (1992) oraz Zhou (1994), uogólniające twierdzenie Tarskiego, dla odwzorowania BR , otrzymujemy wniosek, że zbiór punktów stałych BR jest niepustą kratą zupełną, a więc w szczególności ma największy i najmniejszy element. Zauważmy, że punkty stałe odwzorowania BR są symetrycznymi równowagami Nasha gry Γ .

Dowód twierdzenia 4.2. Niech $\tilde{a}, a$ będą dwiema równowagami Nasha. Pokażemy, nie wprost, że nie może zachodzić (w porządku po współrzędnych) $\tilde{a} \geq a$ z przynajmniej jedną ostrą nierównością. Z warunku równowagi Nasha dla $\tilde{a}$ mamy:

$$F(a^i, Q(a^i, \tilde{a}^{-i})) \leq F(\tilde{a}^i, Q(\tilde{a}^i, \tilde{a}^{-i}))$$

Łącząc tę zależność z własnością jednokrotnego przecięcia, otrzymujemy:

$$F(a^i, Q(a^i, a^{-i})) \leq F(\tilde{a}^i, Q(\tilde{a}^i, a^{-i}))$$

Przeczy to, że a jest ścisłą równowagą Nasha albo równowagą Nasha, gdy własność jednokrotnego przecięcia jest ścisła.

Dowód twierdzenia 4.3. Wynika bezpośrednio z monotoniczności funkcji wypłaty F po a^i przy ustalonym poziomie q dla każdego gracza i .

Dowód twierdzenia 4.4. Dla $I = 2$ z twierdzenia 4.2 mamy, że występowanie więcej niż jednej równowagi Nasha oznacza, że dla dwóch dowolnych równowag Nasha: (a^1, a^2) i (b^1, b^2) zachodzi $a^1 \geq b^1$ i $a^2 < b^2$. Z warunku równowagi Nasha dla (b^1, b^2) i monotoniczności funkcji Q otrzymujemy:

$$F^1(b^1, Q(b^1, b^2)) \geq F^1(a^1, Q(a^1, b^2)) > F^1(a^1, Q(a^1, a^2))$$

Łącząc powyższą nierówność z analogicznymi warunkami dla drugiego gracza, otrzymujemy tezę twierdzenia 4.4. Dla wypadku $I > 2$ oraz równowag Nasha z tą samą wartością Q postępujemy analogicznie.

Dowód twierdzenia 5.1. Zgodnie ze schematem znanym z prac Amir (1989), Sundaram (1989a) oraz przekształceniem zaproponowanym w dowodzie twierdzenia 4.1 rozpatrzmy następujące przeformułowanie gry Γ^D . Niech dla zadanej niemalejącej i półciągłej z góry stacjonarnej strategii η :

$$\phi(q) \equiv g(\underbrace{\eta(q), \dots, \eta(q)}_I, q) \quad (1)$$

Ponieważ g jest ciągle i monotoniczne, znajomość ϕ wystarcza do określenia η . Oznaczmy: $\bar{g}_\phi(q) \equiv g(\bar{a}, \eta(q), \dots, \eta(q), q)$ oraz $\underline{g}_\phi(q) \equiv g(0, \eta(q), \dots, \eta(q), q)$, gdzie ϕ jest zadane równaniem (5). Rozpatrzmy zbiór $B_\phi = \{(q', q) : q \in \mathbf{Q}, \exists a \in A, q' = g(a, \eta(q), \dots, \eta(q), q)\}$, gdzie η jest zadane przez ϕ . Zdefiniujmy odwzorowanie $b_\phi : B_\phi \rightarrow A$ takie, że $b(y, q) = \{a \in A : g(a, \eta(q), \dots, \eta(q), q) = y\}$, gdzie znów ϕ jest zadane równaniem (1). Analogicznie do dowodu twierdzenia 4.1 łatwo wykazać, że b_ϕ jest funkcją, a $b_\phi(\cdot, q) : B_\phi|_q \rightarrow A$ jest ciągłą.

Zadanie poszukiwania najlepszej odpowiedzi danego gracza na zadaną, symetryczną, stacjonarną strategię Markowa pozostałych graczy przedstawia się następująco:

$$\max_{(y_t)_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^\infty \beta^t F(b_\phi(y_t, q_t), q_t) \quad (2)$$

gdzie $(\forall t) y_t \in [\underline{g}_\phi(q_t), \bar{g}_\phi(q_t)]$ oraz $q_{t+1} = y_t, q_0 \in \mathbf{Q}$. Zdefiniujmy następujące równanie Bellmana:

$$M_\phi(q) = \max_{y \in [\underline{g}_\phi(q), \bar{g}_\phi(q)]} \{F(b_\phi(y, q), q) + \beta M_\phi(y)\} \quad (3)$$

i zbiór $\Phi = \{\phi : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q} \mid \phi \text{ jest półciągłe z góry i niemalejące}\}$. Niech odwzorowanie $X_\phi(q) = \{y \in [\underline{g}_\phi(q), \bar{g}_\phi(q)] : M_\phi(q) = F(b_\phi(y, q), q) + \beta M_\phi(y)\}$ oznacza zbiór maksymalizatorów równania Bellmana.

Po tych oznaczeniach dowód twierdzenia rozpoczniemy (lemat 2) od wykazania, że rozwiązanie równania Bellmana (3) odpowiada rozwiązaniu problemu (2) dla półciągłej z góry i niemalejącej strategii η . W lemacie 3 wykażemy istnienie jedynej najlepszej odpowiedzi gracza i na zadaną strategię graczy $-i$ na danej dziedzinie strategii. W twierdzeniu 1, łącząc wyniki lematów 2 i 3 oraz używając wyników lematu II.10 (Sundaram 1989a) i 1–3 (Sundaram 1989b), zdefiniujemy oraz wykażemy ciągłość odwzorowania pomiędzy przestrzenią zagregowanych strategii pozostałych graczy $-i$ a przestrzenią zagregowanych strategii wszystkich graczy. Zastosowanie twierdzenia Schaudera o punkcie stałym skończy dowód.

Uwaga: Sundaram (1989a) dla uniknięcia problemów brzegowych rozszerza analizowaną przestrzeń zmiennej stanów, a następnie wykazuje, że równowaga Nasha otrzymana na takiej przestrzeni pozostaje równowagą po ograniczeniu przestrzeni zmiennej stanów do analizowanej w modelu. Taka metoda jest skuteczna także w analizowanym modelu. Dla uproszczenia notacji pominiemy jednak ten krok, odsyłając czytelnika do pracy Sundaram (1989a).

Lemat 2. Niech gracze $-i$ używają niemalejącej, stacjonarnej, półciągłej z góry strategii η . Wtedy istnieje najlepsza odpowiedź gracza $i: \tilde{\eta}$ (tj. rozwiązująca problem maksymalizacyjny (6) dla danej η).

Dowód lematu 2. Analogicznie do dowodu przedstawionego w pracy Sundaram (1989a) niech BU oznacza przestrzeń ograniczonych, półciągłych z góry funkcji: $Q \rightarrow A$ z metryką supremum. Zdefiniujmy operator Λ :

$$(\Lambda m)(q) = \max_{y \in [\underline{g}_\phi(q), \bar{g}_\phi(q)]} \{F(b_\phi(y, q), q) + \beta m(y)\} \quad (4)$$

Łatwo wykazać, że Λm należy do BU , a operator Λ jest zblizający. Ponieważ BU jest zupełną przestrzenią metryczną, na mocy zasady Banacha ma jedyny punkt stały $M_\phi = \Lambda M_\phi$, a odwzorowanie maksymalizatorów z równania (4) dla $m = M_\phi$ ma (mierzalny) wybór: $\tilde{\eta}$. To, że $\tilde{\eta}$ jest rozwiązaniem problemu, wynika z zasady maksimum i obserwacji, że F jest ograniczona. Ponadto funkcja wartości M_ϕ jest rosnąca na Q .

Lemat 3. Niech $\hat{\phi}(q) = \max X_\phi(q)$ będzie najwyższym wyborem X z dla każdego q . Wtedy $\hat{\phi}$ jest jedynym półciągłym z góry wyborem z X .

Dowód lematu 3. Dla uproszczenia pomijamy subskrypty oznaczające strategię ϕ . Na mocy założeń funkcja b ma malejące przyrosty pomiędzy zmiennymi (y, q) . W połączeniu z wklęsłością oraz rosnącymi przyrostami F (względem a, q) otrzymujemy, że $F(b(y, q), q) + \beta M(y)$ ma ściśle rosnące przyrosty z (y, q) . W konsekwencji (por. Milgrom, Shannon 1994) wszystkie optymalne wybory z odwzorowania X są niemalejące z q . W szczególności funkcja $\hat{\phi}(q) = \max X_\phi(q)$ jest niemalejąca na zwartym zbiorze Q , a więc jest prawie wszędzie ciągła. Aby niemalejąca funkcja $\hat{\phi}$ była półciągła z góry, wystarczy wykazać, że jest prawostronnie ciągła w każdym punkcie nieciągłości.

Niech q będzie punktem nieciągłości $\hat{\phi}$. Rozpatrzmy malejący ciąg $(q_n)_{n=0}^\infty$ zbiegający do q z prawej strony. Odpowiadający $(q_n)_{n=0}^\infty$ ciąg $(\hat{\phi}(q_n))_{n=0}^\infty$ jest monotoniczny i ograniczony, a więc zbieżny. Punkt zbieżności tego ciągu oznaczmy przez $\check{\phi}$. Widać, że $\check{\phi} \geq \hat{\phi}(q)$. Następnie wykażemy, nie wprost, że $\check{\phi} = \hat{\phi}(q)$.

Niech $\check{\phi} < \hat{\phi}(q)$. Z monotoniczności F mamy:

$$F(b(y, q_n), q_n) + \beta M(y) > F(b(y, q_{n+1}), q_{n+1}) + \beta M(y) > \dots > F(b(y, q), q) + \beta M(y).$$

Wiedząc także, iż $\underline{g}$ oraz $\bar{g}$ są półciągłe z góry i rosnące, wiemy, że dla n odpowiednio dużego zachodzi: $\max F(b(y, q_n), q_n) + \beta M(y) > \max F(b(y, q), q) + \beta M(y)$, gdzie $\max$ jest brany względem zbiorów dostępnych dla odpowiedniej zmiennej stanu.

W przeciwieństwie do modelu rozpatrywanego przez Sundaram (1989a) zbiór dostępnych decyzji $[\underline{g}(\cdot), \bar{g}(\cdot)]$ jest rosnący względem silnego porządku Veinotta (Veinott 1992), co może prowadzić do tego, że decyzja dostępna dla q nie musi być już dostępna dla q_n . Niemniej jednak z monotoniczności i półciągłości z góry funkcji $\underline{g}, \bar{g}$ wnioskujemy o ich prawostronnej ciągłości. Jeżeli więc

$\hat{\phi}(q) \in [\underline{g}(q), \bar{g}(q)]$, to w przypadku dużego n wartość $\hat{\phi}(q)$ musi być dostępna także dla zmiennej stanu q_n . Gdy $\hat{\phi}(q) = \underline{g}(q)$, wtedy z prawostronnej ciągłości $\underline{g}$ i ciągłości F i b mamy także zagwarantowane istnienie odpowiednio dużego n , dla którego analizowana nierówność będzie spełniona.

Dalej:

$$F(b(\hat{\phi}(q_n), q_n), q_n) + \beta M(\hat{\phi}(q_n)) > F(b(\hat{\phi}(q_{n+1}), q_{n+1}), q_{n+1}) + \beta M(\hat{\phi}(q_{n+1})) > \dots > F(b(\tilde{\phi}, q), q) + \beta M(\tilde{\phi}),$$

skąd wynika, że dla dużych n zachodzi:

$$F(b(\hat{\phi}(q_n), q_n), q_n) + \beta M(\hat{\phi}(q_n)) < F(b(\tilde{\phi}, q), q) + \beta M(\tilde{\phi}) \leq F(b(\hat{\phi}(q), q_n), q_n) + \beta M(\hat{\phi}(q)),$$

co przeczy definicji $\hat{\phi}$.

To, że funkcja $\hat{\phi}$ jest jedynym półciągłym z góry wyborem z $\mathbf{X}$, udowadniamy analogicznie do dowodu lematu II.7 w pracy Sundarama (1989a).

Twierdzenie 1. Gra Γ^D ma symetryczną równowagę Nasha doskonałą ze względu na podgry na zbiorze BU . Równowagowe profile strategii są więc niemalejącymi, półciągłymi z góry funkcjami q .

Dowód twierdzenia 1. Zauważmy, że zbiór Φ jest zwarty (w topologii zbieżności punktowej) i wypukły. Zdefiniujmy operator B z Φ w Φ przez $B(\phi)(q) = \hat{\phi}(q)$. Ponieważ Φ jest zbiorem zwartym i wypukłym, a B jest ciągły (por. Sundaram 1989a; 1989b) w topologii zbieżności punktowej na mocy twierdzenia Schaudera wiemy, że B ma punkt stały $B\tilde{\phi} = \tilde{\phi}$. Dalej otrzymujemy: $\tilde{\phi}(q) \equiv g(\eta(q), \dots, \eta(q), q) = g(\tilde{\eta}(q), \eta(q), \dots, \eta(q), q) = \tilde{\phi}(q)$, a więc $\eta = \tilde{\eta}$. Profil strategii $(\tilde{\eta}, \dots, \tilde{\eta})$ jest symetryczną równowagą Nasha gry Γ^D . Zauważmy, że $\tilde{\eta}$ jest niemalejąca i półciągła z góry.

Dowód twierdzenia 5.2. Zauważmy, że dla półciągłych z góry i niemalejących strategii funkcja Z ze zbioru wartości agregatu w ten sam zbiór jest niemalejąca i półciągła z góry. Zgodnie z twierdzeniem Tarskiego ma zatem najmniejszy i największy punkt stały, będący stanem ustalonym dynamiki dobra publicznego w tej gospodarce. Półciągłość z góry funkcji Z gwarantuje zbieżność iteracji rozpoczętych od maksymalnego poziomu dobra publicznego do największego punktu stałego.

The characteristics of the equilibrium set in submodular games with individual supply of public goods

Abstract

The work analyzes a static and a dynamic economy with individual supply of expenditure on public good. The article aims at giving conditions sufficient for the existence of Nash equilibrium for a game describing such economies and providing the characteristics of the structure of a set of such equilibria for general production functions of public good.

The methods used are based on the results of optimizing super- and submodular functions (Topkis 1995) and are a generalisation of a wider class of method aggregates used in Amir, Lambson (2000) and Sundaram (1989a).

Keywords: public goods, strategic substitution, submodular games