

Krótkookresowe prognozowanie inflacji z użyciem modeli czynnikowych

Paweł Baranowski*, Agnieszka Leszczyńska[#],
Grzegorz Szafranski[‡]

Nadesłany: 14 stycznia 2010 r. Zaakceptowany: 16 czerwca 2010 r.

Streszczenie

Dynamiczne modele czynnikowe (DFM) umożliwiają uzyskanie syntetycznej informacji o kształtowaniu się zmienności dużego zbioru danych. Celem niniejszego opracowania jest sprawdzenie jakości krótkookresowych prognoz inflacji CPI oraz inflacji bazowej w Polsce (z wyłączeniem cen energii i żywności), sporządzonych za pomocą modeli DFM. W badaniu wykorzystano 182 szeregi czasowe o częstotliwości miesięcznej, obejmujące obserwacje zmiennych makroekonomicznych od 1999 do 2009 r.

Otrzymane rezultaty wskazują, że efektywne korzystanie z dużego zbioru danych może obniżyć błędy poza próbę prognoz inflacji, szczególnie dla dłuższych horyzontów prognozy. Podobne wyniki dla inflacji uzyskano we wcześniejszych badaniach.

Słowa kluczowe: inflacja, prognozowanie, dynamiczne modele czynnikowe

JEL: C53, E31, E37

* Narodowy Bank Polski, Instytut Ekonomiczny, Uniwersytet Łódzki, Katedra Ekonometrii;
e-mail: pawel.baranowski@nbp.pl.

[#] Narodowy Bank Polski, Instytut Ekonomiczny; e-mail: agnieszka.leszczynska@nbp.pl.

[‡] Narodowy Bank Polski, Instytut Ekonomiczny, Uniwersytet Łódzki, Katedra Ekonometrii;
e-mail: grzegorz.szafranski@nbp.pl.

1. Wstęp

Banki centralne na bieżąco analizują wiele czynników mogących, bezpośrednio lub pośrednio, kształtować procesy inflacyjne. Wynika to głównie z niepewności co do tego, które z nich mają obecnie największy wpływ na inflację. Wśród monitorowanych zmiennych można wyróżnić m.in. wskaźniki produkcji i koniunktury, agregaty monetarne, ceny dóbr importowanych i surowców na rynkach światowych, kursy walutowe, wskaźniki rynku pracy oraz stopy procentowe. Informacje płynące z tak różnorodnych czynników stosuje się do procesu prognozowania inflacji. Wykorzystanie pełnego zbioru danych w standardowych modelach nie jest na ogół możliwe ze względu na niewystarczającą liczbę obserwacji w stosunku do liczby wykorzystywanych szeregów. Proste uśrednianie informacji czy pominięcie wielu ważnych zmiennych w modelu prognostycznym może prowadzić do uzyskania niedokładnych i obciążonych prognoz. Narzędziem dostarczającym syntetycznej informacji, zalecanym do bieżącego prognozowania inflacji, jest dynamiczny model czynnikowy DFM (ang. Dynamic Factor Model); por. Stock i Watson (2002b); Forni i in. (2005).

W modelu czynnikowym wykorzystuje się fakt, że macierz kowariancji dużego zbioru predyktorów może być syntetycznie przedstawiona za pomocą zmienności kilku wspólnych, nieobserwowalnych czynników. Czynniki te, chociaż z ekonomicznego punktu widzenia mają atoretyczną konstrukcję, mogą być wyrazem nieobserwowalnych sił sprawczych funkcjonujących w gospodarce¹. Mogą być utożsamiane z krótkookresowymi wahaniami aktywności gospodarczej i służyć do aproksymacji bieżącego stanu koniunktury (Altissimo i in. 2001; Stock, Watson 1999). Zastosowanie modeli czynnikowych pozwala na skondensowanie informacji zawartej w zbiorze predyktorów do rozmiarów, które umożliwiają jej efektywne wykorzystanie w modelu prognostycznym, bez znacznej utraty liczby stopni swobody i bez narażenia się na ryzyko obciążenia prognoz wynikającego z pominięcia ważnych predyktorów.

Technika łączenia informacji z dużego zbioru danych za pomocą modeli czynnikowych jest stosowana w analizach makroekonomicznych do rozwiązywania wielu podstawowych problemów badawczych. Wśród przykładów warto wymienić wnioskowanie o syntetycznym stanie rynku lub gospodarki na podstawie danych zdezagregowanych (Forni, Lippi 1997; Del Negro, Otrok 2007) czy modelowanie reakcji polityki pieniężnej na informacje pochodzące z dużego zbioru danych (Bernanke, Boivin 2003; Boivin, Giannoni 2006). Modele czynnikowe stosowane są także do konstrukcji szeregów nieobserwowanych bezpośrednio, np. inflacji bazowej lub „czystej” (Cristadoro i in. 2005; Brzoza-Brzezina, Kotłowski 2009).

Do podstawowych zastosowań modeli wykorzystujących wspólne czynniki jako zmienne objaśniające należy krótkookresowe prognozowanie stanu gospodarki, w tym PKB (Giannone i in. 2008, Schumacher 2007) i jego komponentów (Angelini i in. 2008), oraz stanu koniunktury gospodarczej (Forni, Reichlin 1998; Aruoba i in. 2008). Modele czynnikowe stały się również popularnym narzędziem bieżącego monitorowania i krótkookresowego prognozowania inflacji, np. w USA (Stock, Watson 2002b; Forni i in. 2005; Gavin, Kliesen 2006), w Kanadzie (Gosselin, Tkacz 2008), w strefie euro (Marcellino i in. 2003), w nowych krajach Unii Europejskiej (Arratibel i in. 2009), a także w Polsce (Kotłowski 2008). W badaniach empirycznych dotyczących inflacji modele czynnikowe charakteryzują się lepszymi własnościami prognostycznymi od wielu modeli szeregów

¹ Taka idea leżała u podstaw rozwijanego przez Stocka i Watsona (1998) modelu indeksów dyfuzji. Jej pierwowzorem była koncepcja cyklu referencyjnego amerykańskiego Narodowego Biura Badań Ekonomicznych (NBER).

czasowych, w tym modeli *stricte* opartych na teorii ekonomicznej (Berger, Stavrev 2008). Podobne wnioski wynikają również z porównań różnorodnych modeli wykorzystywanych w Banku Anglii do prognozowania inflacji (Kapetanios i in. 2008).

Celem niniejszego badania jest sprawdzenie jakości krótkookresowych prognoz za pomocą modeli DFM dla dwóch wskaźników inflacji w Polsce, tj. indeksu cen towarów i usług konsumpcyjnych (indeks CPI) oraz indeksu CPI z wyłączeniem cen energii i żywności (tzw. inflacji bazowej). Na podstawie dużego zbioru ($N = 182$) miesięcznych szeregów czasowych obejmujących obserwacje od 1999 do 2009 r. ($T = 127$) sporządzono prognozy miesięcznej inflacji w ujęciu rocznym w horyzoncie prognoz do 12 miesięcy naprzód, z wyróżnieniem prognozy publikowanej w bieżącym miesiącu, zwanej bieżącym monitoringiem (ang. *nowcasting*). Prognozy uzyskane za pomocą modelu DFM zostaną porównane z prognozami wzorcowymi, stanowiącymi dla nich punkt odniesienia (zwykła średnia, metoda naiwna, model autoregresyjny, model wskaźnika wyprzedzającego), przy wykorzystaniu 24- i 12-miesięcznego okresu weryfikacji prognoz poza próbę.

Struktura pracy jest następująca. W drugim rozdziale artykułu opisano konstrukcję dynamicznych modeli czynnikowych, przegląd metod estymacji oraz możliwość zastosowania tej klasy modeli do prognozowania. W trzecim rozdziale przedstawiono założenia badania empirycznego, a w czwartym – otrzymane wyniki.

2. Dynamiczny model czynnikowy

2.1. Prognozowanie na podstawie dużego zbioru zmiennych

Oznaczmy przez $\mathbf{X} = \{x_{it}\}_{i=1, \dots, N}$ zbiór zmiennych objaśniających (predyktorów)² obserwowanych w okresach $t = 1, \dots, T$, na podstawie którego wyznaczamy prognozy zmiennej na h okresów naprzód ($h = 1, \dots, 12$):

$$y_{t+h} = \beta_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i x_{it} + \varepsilon_{t+h} \quad (1)$$

Gdy $N > T$, wykorzystanie wszystkich predyktorów w tradycyjnej analizie regresji nie jest możliwe³. Nawet jeśli liczba zmiennych jest mniejsza niż liczba obserwacji ($N > T$), to ze względu na wariancję estymatora MNK oczekiwany błąd prognozy *ex ante* nie dąży asymptotycznie do zera, gdy liczba zmiennych objaśniających zwiększa się wraz ze wzrostem T (przy stałej relacji N/T) – por. Stock i Watson (2006). Z kolei ograniczenie zbioru informacji do kilku najlepszych predyktorów (wyselekcjonowanych na przykład na podstawie kryteriów informacyjnych) może spowodować obciążenie prognoz, szczególnie w sytuacji, gdy występuje duża niepewność co do przyszłych determinant prognozowanego procesu.

Badania empiryczne porównujące wiele różnych metod prognozowania pokazują, że zmniejszenie wariancji błędów prognoz poza zakresem próby jest możliwe dzięki łączeniu metod progno-

² Dla uproszczenia analizy (w celu wykorzystania asymptotycznych własności modeli czynnikowych) założymy, że predyktory poddano takim transformacjom, aby uzyskać szeregi stacjonarne, a następnie je wystandaryzowano.

³ Z praktycznego punktu widzenia macierz X powinna również zawierać opóźnione zmienne objaśniające jak w modelu z rozkładem opóźnień (ang. *distributed lags*, DL). Sprawia to, że ograniczenia dotyczące liczby stopni swobody są szczególnie uciążliwe.

zowania, oraz łączenie informacji pochodzących z różnych źródeł (Marcellino 2004; Watson, Stock 2004; Kapetanios i in. 2008)⁴. Obydwa te postulaty spełnia model Stocka i Watsona (1998), znany w literaturze jako model indeksów dyfuzji (ang. *diffusion index model*):

$$y_{t+h} = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \sum_{r=1}^R \kappa_r f_{r,t} + \varepsilon_{t+h} \quad (2)$$

Według pomysłu Stocka i Watsona indeksy dyfuzji (zmienne $f_{r,t}$) powinny wyrażać wspólny dla większości predyktorów wzorec zmian, a dodanie składnika autoregresyjnego spełnia postulat łączenia różnych metod.

Indeksy dyfuzji nie są bezpośrednio obserwowalne i do ich estymacji trzeba użyć metod, które efektywnie dokonują syntezy informacji zawartej w próbie. Syntetycznym predyktorem, gdy $N < T$, może być średnia z wartości wszystkich wystandaryzowanych zmiennych $\bar{x}_t = 1/N \sum_{i=1}^N x_{i,t}$ dla ustalonego t (por. Forni, Reichlin 1998). Użycie zwykłej średniej oznacza jednak arbitralne przyjęcie dla każdej zmiennej równej wagi, co może nie być optymalnym podejściem, gdy N jest duże w porównaniu z T . W praktyce wagi ustala się na podstawie analizy macierzy korelacji zmiennych (czyli macierzy kowariancji dla wystandaryzowanych zmiennych) przez uproszczenie jej struktury. W podejściu tym, znanym z analizy czynnikowej, zakłada się, że predyktory generowane są przez kilka ($R \ll N$) wspólnych czynników (ang. *common factors*):

$$x_{i,t} = \lambda_{i,1} f_{1,t} + \dots + \lambda_{i,r} f_{r,t} \dots + \lambda_{i,R} f_{R,t} + u_{i,t}; \quad i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{\Lambda}' + \mathbf{U}$$

Równanie (3) określa statyczny model czynnikowy (por. Chamberlain, Rotschild 1983). Macierz $\mathbf{F}_{(T \times R)}$ składa się z R nieobserwowalnych czynników ($f_{r,t}$) wspólnych dla wszystkich predyktorów, a macierz $\mathbf{\Lambda}_{(N \times R)}$ tworzą stałe w czasie ładunki czynnikowe (ang. *loadings*) $\lambda_{i,r}$, czyli parametry liniowych kombinacji tych czynników. Idiosynkratyczne składniki losowe $u_{i,t}$, będące elementami macierzy $\mathbf{U}_{(T \times N)}$, odpowiadają za pozostałe nieskorelowane z czynnikami $f_{r,t}$ zakłócenia zmiennych $x_{i,t}$.

Macierz kowariancji predyktorów $\Sigma_{\mathbf{X}}$ można wówczas zapisać:

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}' + \mathbf{\Omega} \quad (4)$$

gdzie $\mathbf{\Omega}$ oznacza macierz kowariancji składników idiosynkratycznych.

Gdy $\mathbf{\Omega}$ jest macierzą jednostkową ($\mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{I}$), model nazywamy dokładnym modelem czynnikowym (ang. *strict, exact*), w pozostałych przypadkach – przybliżonym modelem czynnikowym (Chamberlain, Rotschild 1983).

⁴ Można również wskazać badania, które nie potwierdzają tak silnej przewagi dynamicznych modeli czynnikowych nad pozostałymi modelami. Na przykład Banerjee i in. (2005) stwierdzają, iż model z trzema czynnikami ma większą zdolność prognozowania inflacji dla strefy euro, w porównaniu z modelem autoregresyjnym (AR), jedynie w trzech na 10 okresów weryfikacji. Jednak modyfikacja tego modelu, polegająca m.in. na dodaniu pięciu zmiennych objaśniających (wskaźników wyprzedzających), sprawia, że taka metoda prognozowania zyskuje w większości okresów weryfikacji przewagę nad modelem AR.

Boivin, Ng (2005) pokazują, że statyczny model czynnikowy, przy założeniu autokorelacji czynników idiosynkratycznych (model przybliżony), może być przedstawiony jako model Stocka i Watsona (2002b):

$$y_{t+h} = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \sum_{r=1}^R \sum_{p=1}^P \kappa_{r,p} \cdot f_{r,t-p} + \varepsilon_{t+h} \quad (5)$$

Model czynnikowy w tej postaci można wykorzystać do prognozowania wybranej zmiennej y . Jak widać, dla $P = 1$ model (5) odpowiada modelowi indeksów dyfuzji (2).

Uogólnieniem modelu statycznego jest dynamiczny model czynnikowy (Forni i in. 2000). Zakłada się dodatkowo, że równanie (3) może być rozszerzone o opóźnienia dla każdego z R czynników⁵, przy czym dla każdego z nich rząd wielomianu rozkładu opóźnień $\lambda_{i,\cdot}(L)$ wynosi co najwyżej S (por. Stock, Watson 2002b):

$$x_{i,t} = \lambda_{i,1}(L)f_{1,t} + \dots + \lambda_{i,R}(L)f_{R,t} + u_{i,t} \quad (6)$$

Kolejne założenie: że wspólne czynniki generowane $f_{r,t}$ są przez wielowymiarowy proces autoregresyjny postaci $f_{r,t+1} = A(L)f_{r,t} + \varepsilon_{r,t}$, leży u podstaw konstrukcji modeli FAVAR (modeli VAR rozszerzonych o wspólne czynniki, zob. Bernanke i in. 2005) i wykorzystania w modelu DFM metody przestrzeni stanów (Doz i in. 2006b).

2.2. Estymacja

Dynamiczny model DFM z R czynnikami i rządzie opóźnień S (model 6) można przedstawić w postaci statycznej, analogicznie do równania (3), w którym liczba statycznych czynników wynosi $R \times (S+1)$. Ma to duże znaczenie przy wyborze metody estymacji wspólnych czynników. Jedną z najpopularniejszych metod – metoda głównych składowych (ang. *principal components*, metoda PC) – pozwala w jednym kroku uzyskać czynniki $\mathbf{F}^{PC} = [f_{r,t}^{PC}]_{T \times R}$ i ich wagi $\hat{\mathbf{\Lambda}} = [\hat{\lambda}_{i,r}]_{N \times R}$. W tym celu dekomponuje się oszacowaną macierz wariancji-kowariancji $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{X}} = 1/NT \mathbf{X}\mathbf{X}'$ na iloczyn diagonalnej macierzy \mathbf{D} oraz ortogonalnej macierzy ($\mathbf{C}'\mathbf{C} = \mathbf{I}_R$):

$$\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}' = \mathbf{F}^{PC} \hat{\mathbf{\Lambda}}' \hat{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{F}^{PC} \quad (8)$$

Na głównej przekątnej macierzy \mathbf{D} znajduje się R największych wartości własnych⁶ empirycznej macierzy kowariancji predyktorów $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{X}}$, a kolumny macierzy \mathbf{D} są wektorami własnymi macierzy $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{X}}$, odpowiadającymi jej największym wartościom własnym. Przekształcenie (8) dla macierzy symetrycznej nazywane jest dekompozycją spektralną (por. Rencher 2002, s. 35). Metoda głównych składowych pozwala bezpośrednio uzyskać macierz wag $\hat{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{C}$, a następnie wyznaczyć macierz wspólnych czynników \mathbf{F}^{PC} jako kombinację liniową predyktorów⁷:

$$\mathbf{F}^{PC} = \mathbf{X}\mathbf{C} \quad (9)$$

⁵ Wówczas takie czynniki nazywamy dynamicznymi.

⁶ Dla macierzy dodatnio określonej (a taką własność ma macierz kowariancji) wartości własne są dodatnie i różne.

⁷ Uwaga: wspólne czynniki nie są określone jednoznacznie. Są wynikiem przyjęcia identyfikujących założeń (tutaj $\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{\Lambda}}' = \mathbf{I}$).

Wynik taki można również uzyskać, minimalizując iteracyjnie sumę kwadratów reszt:

$$\sum_{t=1}^T \hat{u}_{i,t}^2 = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (x_{i,t} - \sum_{p=1}^P \Lambda_{i,r,p} \cdot f_{r,t-p}^{PC})^2 \quad (10)$$

Metoda PC w dynamicznej analizie czynnikowej jest stosowana ze względu na prostotę obliczeniową i jest równoważna metodzie największej wiarygodności, gdy składniki idiosynkratyczne mają rozkład normalny. Ponadto ma ona dobrze poznane własności asymptotyczne przy dosyć ogólnych założeniach nakładanych na składniki losowe (por. Stock, Watson 1998). Z drugiej strony jest to metoda statyczna i nie uwzględnia faktu, że w statycznym modelu czynniki idiosynkratyczne mają strukturę autoregresyjną. Jednak w modelu ze słabą korelacją składników idiosynkratycznych (przybliżony DFM), gdy $N, T \rightarrow \infty$, estymator wspólnych czynników wg metody PC jest zgodny, jeżeli predyktory są słabostacjonarne – por. Stock, Watson (2002a) i Bai, Ng (2002).

Do pozostałych popularnych metod estymacji modeli DFM dla dużych zbiorów danych należą metody oparte na:

- analizie głównych składowych ze spektralną estymacją rzędu opóźnień, która pozwala uzyskać jak najlepszy stosunek sygnału do szumu (Forni i in. 2000),
- maksymalizacji funkcji wiarygodności z wykorzystaniem modeli przestrzeni stanów i filtru Kalmana – por. Doz i in. (2006a; 2006b), Kapetanios, Marcellino (2003).

W przeglądowych pracach (Boivin, Ng 2005, Breitung, Eickmeier 2006) wskazuje się, że różnice między prognozami wykorzystującymi wspólne czynniki uzyskane różnymi metodami estymacji są nieznaczne. Dlatego w opracowaniu odnosimy się przede wszystkim do wyników uzyskanych metodą głównych składowych (PC), choć prezentujemy również wyniki uzyskane metodami największej wiarygodności (MNW) i MNW z filtrem Kalmana za pomocą procedur do pakietu Matlab pochodzących z Doz i in. (2006a; 2006b).

2.3. Prognozowanie

Prognozowanie na podstawie modelu DFM można przeprowadzić na wiele sposobów (zob. Boivin, Ng 2005):

1. Iteracyjnie, prognozując wspólne czynniki na podstawie równania (7), co jest utrudnione, gdy z góry nie znamy ich liczby ani rzędu ich opóźnień.
2. Prognozując predyktory (składniki macierzy X) na podstawie algorytmu maksymalizacji oczekiwań (ang. *expectation maximization*, EM) (por. Stock, Watson 2002b) i dopiero na ich podstawie konstruując wspólne czynniki, co jest alternatywnym sposobem uwzględniania opóźnień publikacyjnych.
3. Stosując dla $h \geq 2$ dwustopniową procedurę Stocka i Watsona (Stock, Watson 2002b) i bezpośrednią metodę prognozowania (ang. *direct forecasting*).

W niniejszym opracowaniu ta ostatnia metoda została wykorzystana jako metoda podstawowa dla modeli czynnikowych. Na pierwszym etapie dokonujemy statycznej estymacji wspólnych czynników $f_{i,t}^{PC}$ z równania (3) lub dynamicznej – z równania (6), a na drugim etapie opracowujemy prognozę inflacji (tj. zmiennej spoza zbioru \mathbf{X}) za pomocą następującego modelu prognostycznego (tzw. *diffusion index model*):

$$y_{t+h} = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \sum_{r=1}^R \sum_{p=1}^P \lambda_{r,p} f_{r,t-p+1}^{PC} + \eta_{t+h} \quad (11)$$

Jeżeli chodzi o liczbę wspólnych czynników i wybór rzędu ich opóźnień, to w wielu pracach empirycznych można dostrzec, że bardzo oszczędny model zapewnia pożądane własności prognostyczne. Przykładowo, Stock, Watson (2002b) i Wang (2009) notują dobre wyniki prognoz w krótkich horyzontach już dla modelu z jednym czynnikiem i jednym opóźnieniem. W literaturze można spotkać dwie grupy rozwiązań problemu wyboru liczby czynników i opóźnień (Bai, Ng 2002). Po pierwsze, liczba czynników może być ustalona arbitralnie, na takim poziomie, żeby zmienność wspólnych czynników opisywała co najmniej ustaloną część zmienności macierzy kowariancji predyktorów. Innym rozwiązaniem jest skorzystanie z bardziej sformalizowanych metod, jak wybór czynników i opóźnień na podstawie zmodyfikowanych kryteriów informacyjnych (Bai, Ng 2002), czy testu istotności poszczególnych opóźnień (Jacobs, Otter 2008; Onatski 2009). Obydwie metody dają liczbę czynników i opóźnień optymalną z punktu widzenia opisu zmienności zbioru predyktorów (\mathbf{X}). Z punktu widzenia równania prognostycznego (11) dla zmiennej może to nie być optymalne rozwiązanie, gdyż zależy nam na dokładnym opisie zmienności, a nie całej macierzy \mathbf{X} . W tym opracowaniu liczbę wspólnych czynników i opóźnień dobieramy albo arbitralnie na niskim poziomie ($R = 1, P = 1$), albo posługując się standardowymi kryteriami informacyjnymi (BIC) bezpośrednio w równaniu prognostycznym (11).

Oddzielnym zagadnieniem jest wybór długości okna do wyznaczenia wspólnych czynników i estymacja parametrów modelu prognostycznego. W metodzie z rozszerzonym okresem estymacji (ang. *expanding window*) korzysta się z coraz dłuższej próby, a w metodzie rolowanej (ang. *rolling window*) – ze stałego okna estymacji. Druga z tych metod, stosowana w niniejszym opracowaniu, w prognozach poza próbę jest bardziej odporna na zmiany strukturalne parametrów modelu prognostycznego. W badaniach empirycznych dla modeli DFM daje ona lepsze wyniki prognoz (por. Breitung, Eickmeier 2006).

Ważną kwestią jest dobór zmiennych do modelu. W teorii wskazuje się, że własności modelu DFM poprawiają się wraz ze wzrostem liczby zmiennych wchodzących w jego skład (estymator jest N-zgodny). Jednakże Boivin, Ng (2006), na podstawie eksperymentu Monte Carlo oraz przykładu empirycznego, wskazują, że w przypadku gdy zmienne są silnie współliniowe lub mają niewielkie wagi, dodanie nowych zmiennych do modelu DFM zwiększa błędy prognoz. Angelini i in. (2001) analizują prognozy z trzech modeli DFM, do których budowy użyto zmiennych charakteryzujących odpowiednio: kategorie nominalne, realne oraz nominalne i realne jednocześnie. Rezultaty wskazują, że żaden z tych trzech modeli nie ma jednoznacznej przewagi nad pozostałymi.

3. Badanie empiryczne

Do badania wykorzystano 182 szeregi o częstotliwości miesięcznej za okres od stycznia 1999 r. do września – grudnia⁸ 2009 r. Zbiór danych obejmuje takie grupy zmiennych, jak: wskaźniki koniunktury, handel zagraniczny, kursy walut, rynek pieniężny i obligacje, indeksy giełdowe, podaż pieniądza, rezerwa obowiązkowa, bilans skonsolidowany MIF, indeksy cen PPI, produkcja

⁸ Różnica wynika z opóźnień publikacyjnych poszczególnych szeregów.

sprzedana przemysłu i budowlano-montażowa, rynek pracy, finanse publiczne, ceny surowców na rynkach światowych, ceny paliw, ceny płodów rolnych i komponenty CPI (szczegółowy wykaz w Aneksie A).

W ślad za większością dotychczasowych badań do konstrukcji wspólnych czynników wykorzystujemy dane oczyszczone z sezonowości metodą TRAMO/SEATS. Mimo to uprzednie pozabawienie danych sezonowości może budzić pewne wątpliwości. Naszym zdaniem ważny argument na rzecz odsezonowywania wynika z metod wyznaczania wspólnych czynników. Metody te działają bowiem w ten sposób, że wybierają dominujący w zbiorze danych wzorzec zmienności. W przypadku zastosowania danych zawierających sezonowość otrzymane wspólne czynniki będą zdeterminowane głównie przez wspólny dla większości predyktorów wzorzec sezonowości, który może znacznie odbiegać od wzorca sezonowości indeksu inflacji⁹. W rezultacie ze względu na ograniczoną liczbę wspólnych czynników (zasada oszczędności) mogą nie zostać uchwycone wahania krótkookresowe, potencjalnie bardzo przydatne w prognozowaniu.

Zmienne odsezonowane poddano następnie transformacjom, aby otrzymać szeregi stacjonarne. Przed przystąpieniem do wyznaczenia wspólnych czynników predyktory zostały tak wystandaryzowane, aby miały jednostkową wariancję.

Do wyznaczenia prognoz korzystamy z danych dostępnych 15. dnia każdego miesiąca. Problem opóźnień w publikacji danych statystycznych rozwiązano, umieszczając w bazie każdą obserwację w terminie jej publikacji¹⁰. Przykładowo, 15 grudnia produkcja sprzedana dostępna jest za październik, inflacja i jej komponenty za listopad, a dane publikowane z częstotliwością dzienną (np. kursy walut) – za pierwszą połowę grudnia. W związku z tym opóźnienie publikacji – według stanu na połowę miesiąca – wynosi dwa miesiące dla produkcji sprzedanej, jeden miesiąc dla inflacji oraz zero miesięcy dla kursów walut (szczegóły zawiera Aneks A).

Eksperyment prognostyczny wykonano na łańcuchowych miesięcznych indeksach cen konsumenta oraz inflacji bazowej. W celu oceny prognoz wygenerowano 24 prognozy poza próbę (okres weryfikacji prognoz od grudnia 2007 do listopada 2009 r.). Prognozy DFM wyznaczono na $h = 1, 2, \dots, 12$ miesięcy naprzód, od okresu t (dla $h = 1$ prognoza dotyczy *de facto* bieżącego miesiąca), korzystając z modeli prognostycznych (11) rozszerzonych o deterministyczną sezonowość:

$$\hat{y}_{t+h} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 y_t + \sum_{r=1}^R \sum_{p=1}^P \hat{\lambda}_{r,p} \hat{f}_{r,t-p+1}^{PC} + \sum_{j=1}^{11} \hat{\gamma}_j s_{j,t+h} \quad (\text{DFM+AR})$$

Prognozy te porównano z modelami wzorcowymi:

$$\hat{y}_{t+h}^{rr} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} y_{t-j+1}^{rr} \quad (\text{zwykła średnia})$$

$$\hat{y}_{t+h}^{rr} = y_t^{rr} \quad (\text{metoda naiwna, model } \textit{random walk}, \text{ RW})$$

$$\hat{y}_{t+h} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 y_t + \sum_{j=1}^{11} \hat{\gamma}_j s_{j,t+h} \quad (\text{model autoregresyjny pierwszego rzędu, AR})$$

$$\hat{y}_{t+h} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 w k_t + \sum_{j=1}^{11} \hat{\gamma}_j s_{j,t+h} \quad (\text{model wskaźników wyprzedzających, Lead})$$

⁹ Z kolei w przypadku, gdy predyktory będą niestacjonarne, dominującym wzorcem zmienności będzie trend.

¹⁰ W tym opracowaniu indeks t związany jest z datą, kiedy dane zostały opublikowane, a nie z okresem, którego dotyczą. Z tego powodu dzień miesiąca, w którym dane były uaktualniane, ma wpływ na określenie wartości tych indeksów.

gdzie:

- y_t, \hat{y}_t – indeks cen miesiąc do miesiąca (CPI lub inflacja bazowa) oraz jego prognoza,
- y_t^{rr}, \hat{y}_t^{rr} – indeks cen rok do roku (CPI lub inflacja bazowa) oraz jego prognoza,
- $\hat{f}_{i,t}$ – wspólne czynniki wyznaczone metodą głównych składowych,
- R, P – odpowiednio: liczba i rząd opóźnień wspólnych czynników wykorzystanych w modelu prognostycznym,
- wk_t – wybrany ankietowy wskaźnik koniunktury (ogólna sytuacja ekonomiczna w handlu)¹¹,
- $s_{j,t}$ – deterministyczne zmienne sezonowe (przyjmujące wartość 1 w miesiącu j i 0 w pozostałych okresach),
- $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\lambda}_{r,p}, \hat{\gamma}_j$ – oszacowania (MNK) parametrów strukturalnych poszczególnych modeli prognostycznych.

Wszystkie modele estymowano rekursywnie w stałym oknie estymacji (ang. *rolling sample*). Długość okna estymacji wynosi, w zależności od horyzontu prognozy, od 92 do 103 miesięcy.

Tak wyznaczone prognozy inflacji miesięcznej posłużyły następnie do wyznaczenia prognoz inflacji rok do roku. Zastosowano dwie metody annualizacji w zależności od horyzontu prognozy¹²:

$$\hat{y}_{t+1}^{rr} = y_t^{rr} (\hat{y}_{t+1} / y_{t-11}) \quad \text{dla } h = 1$$

$$\hat{y}_{t+1}^{rr} = \prod_{i=1}^h \hat{y}_{t+i} \prod_{j=1}^h y_{t-j+1} \quad \text{dla } h \geq 2.$$

4. Wyniki

Wyniki porównań modeli DFM i modeli wzorcowych prezentujemy dla 24-miesięcznego okresu weryfikacji w dwóch układach: oddzielnie dla bieżącego monitoringu ($h = 1$) i dla prognoz na $h > 1$. W aneksach przedstawiamy także wyniki dla krótszego, 12-miesięcznego okresu weryfikacji (od grudnia 2008 do listopada 2009 r.). W celu czytelnego przedstawienia wyników wybór specyfikacji modeli DFM ograniczono głównie do prostych modeli z jednym opóźnieniem i jednym czynnikiem. Podobne rezultaty można uzyskać dla modelu z większą liczbą wspólnych czynników¹³. Spośród tych modeli prezentujemy tylko model z liczbą wspólnych czynników określaną na podstawie wskazań kryterium informacyjnego Schwarza (BIC). Porównanie modeli oparte było na syntetycznych miarach błędów prognoz poza próbę RMSE, MAE i ME. Ponadto dla horyzontu jednomiesięcznego (niewymagającego składania prognoz pochodzących z różnych modeli) prezentujemy dodatkowo wyniki estymacji modelu DFM z użyciem bardziej zaawansowanych obliczeniowo metod – filtru Kalmana (Doz i in. 2006b) i metody quasi-największej wiarygodności (Doz i in. 2006a).

¹¹ Wybór wskaźnika wyprzedzającego wynika ze wstępnych analiz błędów prognoz RMSE w przyjętym 24-miesięcznym okresie weryfikacji. Wyboru dokonano spośród wielu rozważanych zmiennych (ankietowe wskaźniki koniunktury, zmienne z rynku finansowego, indeks cen produkcji sprzedanej przemysłu).

¹² Ze względu na coroczną rewizję wag indeksu CPI oraz sposób obliczania inflacji rocznej przez GUS agregacja czasowa obciążona jest błędami (sięgającymi w zależności od miesiąca i horyzontu nawet powyżej 0,1 pkt proc.). Zastosowane metody gwarantują, że błędy agregacji będą stosunkowo niskie, przy zachowaniu prostoty obliczeń.

¹³ Dla ilustracji: pierwszy czynnik odpowiada za nieco ponad 11% zmienności predyktorów w całym badanym okresie, a pierwszych pięć czynników za około 35% tej zmienności.

Tabela 1

Błędy prognoz $h = 1$ (bieżący monitoring) – inflacja CPI (pkt proc.)

Model	Liczba czynników	Ranking (RMSE)	RMSE	MAE	ME
AR	-	3	0,250	0,181	0,036
RW	-	6	0,294	0,253	-0,009
Lead	-	5	0,276	0,216	0,093
Zwykła średnia	-	7	0,937	0,776	0,264
DFM_PC	5 cz.	4	0,251	0,186	-0,033
DFM_PC	1 cz.	3	0,250	0,177	0,033
DFM_Kal	1 cz.	2	0,246	0,177	0,019
DFM_Doż	1 cz.	1	0,245	0,179	0,009

Uwaga: sufiksy _PC, _Kal, _Doż oznaczają metodę wyznaczania wspólnych czynników – odpowiednio głównych składowych, filtr Kalmana oraz metodę quasi-największej wiarygodności. Wszystkie modele dla rzędu opóźnień $P = 1$.

Wyniki zaprezentowane w tabeli 1 wskazują, że:

- spośród porównywanych modeli wzorcowych najniższe błędy uzyskuje się za pomocą modelu autoregresyjnego,
- prognoza za pomocą modeli DFM jest porównywalna (w sensie RMSE) z najlepszą metodą wzorcową,
- wybór metody estymacji nie ma istotnego wpływu na własności prognostyczne modelu DFM.

W tabeli 2 przedstawiamy analogiczne rezultaty dla inflacji bazowej z wyłączeniem cen energii i żywności.

Wyniki dla inflacji bazowej (tabela 2) wskazują, że:

- spośród metod wzorcowych najniższe miary błędów uzyskuje się, stosując model autoregresyjny (AR),

Tabela 1

Błędy prognoz $h = 1$ – inflacja bazowa z wyłączeniem cen energii i żywności (pkt proc.)

Model	Liczba czynników	Ranking (RMSE)	RMSE	MAE	ME
AR	–	5	0,161	0,131	0,068
RW	–	7	0,213	0,152	0,071
Lead	–	6	0,181	0,135	0,060
Zwykła średnia	–	8	0,604	0,487	0,473
DFM_PC	4	2	0,149	0,117	-0,018
DFM_PC	1	4	0,154	0,125	0,018
DFM_Kal	1	3	0,150	0,121	0,007
DFM_Doż	1	1	0,145	0,117	0,002

- prognozy za pomocą modeli DFM są lepsze o około 5% (pod względem RMSE) od najlepszych modeli wzorcowych,
- wybór metody estymacji nie ma znacznego wpływu na własności prognostyczne modelu DFM.

Dla inflacji CPI po skróceniu okresu weryfikacji do 12 miesięcy otrzymano podobny ranking, a dla inflacji bazowej przewaga modeli czynnikowych zmniejszyła się na korzyść modelu wskaźników wyprzedzających (zob. Aneks B).

W tabelach 3 i 4 prezentujemy szczegółowe wyniki ograniczone – ze względu na przejrzystość pracy – do wybranych horyzontów prognoz, tj. $h = 2, 3, 6, 9, 12$ miesięcy. Ponadto dla najlepszych prognoz DFM i prognoz wzorcowych błędy RMSE dla wszystkich horyzontów do $h = 12$ przedstawiono na wykresach. Ponieważ w eksperymentach dla $h = 1$ wybór metody liczenia wspólnych czynników nie wpływał istotnie na wielkość błędów prognoz, prezentowane są wyłącznie modele DFM szacowane metodą głównych składowych¹⁴.

Wyniki zaprezentowane na wykresie 1 i w tabeli 3 wskazują, że:

- DFM jest porównywalna (pod względem RMSE) z najlepszymi modelami wzorcowymi (tj. modelem AR i LEAD) dla horyzontów $h < 6$,
- Zastosowanie modeli DFM pozwala ograniczyć błędy prognoz RMSE dla $h \geq 6$ horyzontów naprzód (od 5% dla $h = 10$ do 30% dla $h = 12$), w porównaniu z analizowanymi modelami wzorcowymi.

Tabela 3

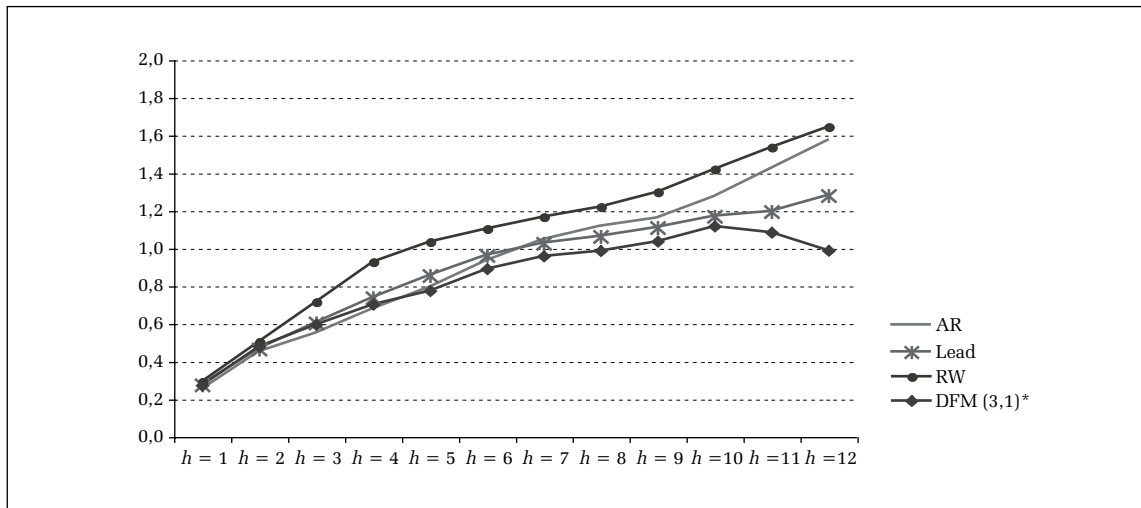
Błędy prognoz $h = 2, 3, 6, 9, 12$ – inflacja CPI (pkt proc.)

Horyzont prognoz		Prognozy					
		AR	RW	Lead	zwykła średnia	DFM_PC (1 czynnik, 1 opóźnienie)	DFM_PC (3 czynniki, 1 opóźnienie)
$h = 2$	RMSE	0,450	0,506	0,466	1,054	0,452	0,479
	MAE	0,337	0,406	0,357	0,890	0,340	0,395
	ME	-0,033	-0,003	0,067	0,322	-0,056	-0,195
$h = 3$	RMSE	0,548	0,717	0,604	1,162	0,566	0,597
	MAE	0,399	0,559	0,486	0,992	0,430	0,490
	ME	0,066	0,044	0,220	0,390	0,041	-0,192
$h = 6$	RMSE	0,935	1,105	0,962	1,417	0,948	0,892
	MAE	0,802	0,894	0,847	1,202	0,841	0,733
	ME	0,559	0,227	0,729	0,629	0,534	-0,033
$h = 9$	RMSE	1,161	1,301	1,110	1,676	1,343	1,038
	MAE	0,995	1,078	0,992	1,364	1,203	0,896
	ME	0,951	0,399	0,992	0,938	1,127	0,202
$h = 12$	RMSE	1,572	1,647	1,280	1,937	1,832	0,989
	MAE	1,378	1,420	1,141	1,587	1,695	0,819
	ME	1,378	0,591	0,911	1,315	1,695	0,339

¹⁴ Wcześniej podobne rezultaty otrzymali Breitung, Eickmeier (2006).

Wykres 1

Błędy RMSE dla wybranych metod prognozowania inflacji CPI



* Liczba czynników i ich opóźnień w modelu DFM przedstawiana jest w nawiasie.

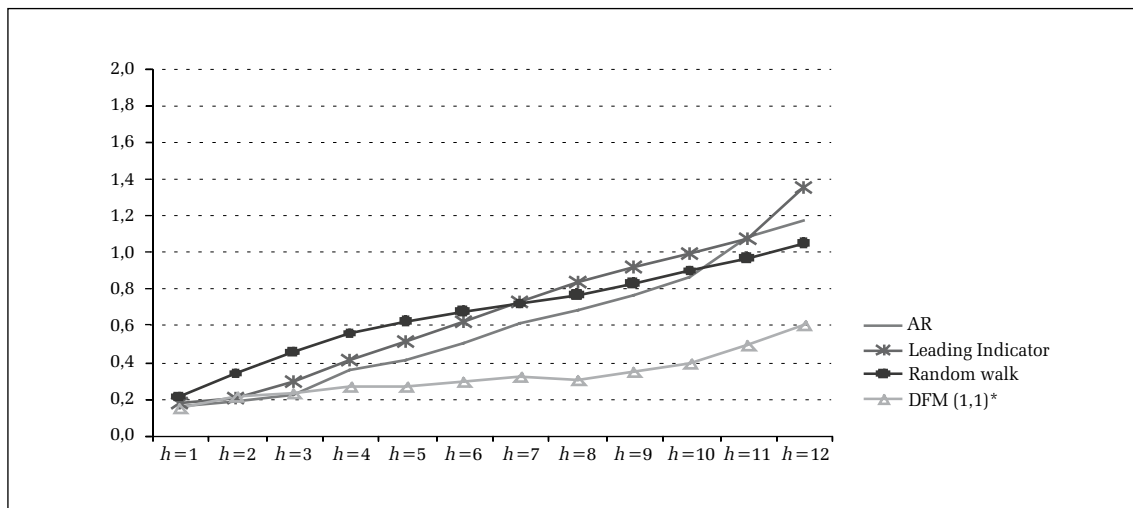
Tabela 4

Błędy prognoz $h = 2, 3, 6, 9, 12$ – inflacja bazowa (pkt proc.)

Horyzont prognoz		Prognozy					
		AR	RW	Lead	Zwykła średnia	DFM_PC (1 czynnik, 1 opóźnienie)	DFM_PC (3 czynniki, 1 opóźnienie)
$h = 2$	RMSE	0,189	0,341	0,202	0,680	0,219	0,313
	MAE	0,153	0,273	0,128	0,548	0,164	0,263
	ME	0,004	0,152	-0,026	0,546	-0,110	-0,192
$h = 3$	RMSE	0,228	0,456	0,299	0,753	0,234	0,379
	MAE	0,184	0,393	0,153	0,621	0,164	0,320
	ME	0,089	0,236	0,030	0,621	-0,079	-0,225
$h = 6$	RMSE	0,508	0,677	0,626	0,955	0,293	0,513
	MAE	0,427	0,583	0,291	0,858	0,244	0,459
	ME	0,357	0,452	0,179	0,858	-0,023	-0,402
$h = 9$	RMSE	0,764	0,883	0,920	1,189	0,349	0,504
	MAE	0,427	0,654	0,492	1,120	0,275	0,425
	ME	0,357	0,635	0,279	1,120	0,113	-0,352
$h = 12$	RMSE	1,173	1,048	1,352	1,447	0,607	0,450
	MAE	0,958	0,869	0,630	1,403	0,515	0,362
	ME	0,880	0,851	0,392	1,403	0,415	-0,194

Wykres 2

Błędy RMSE dla wybranych metod prognozowania inflacji bazowej



* Liczba czynników i ich opóźnień w modelu DFM przedstawiana jest w nawiasie.

• Spośród pozostałych metod prognozowania dla $h = 2$ najniższe błędy zapewnia model autoregresyjny, a dla dłuższych – model wskaźników wyprzedzających.

W krótszym okresie weryfikacji (od grudnia 2008 do listopada 2009 r.), w którym wystąpiła gwałtowna zmiana tendencji inflacyjnych, stosunkowo dobre wyniki prognoz uzyskiwano za pomocą zwykłej średniej, a modele DFM zdobywały przewagę jedynie w dłuższych horyzontach (por. tabela 4 w Aneksie C).

W tabeli 4 prezentujemy rezultaty dla inflacji bazowej z wyłączeniem cen energii i żywności.

Wyniki dla inflacji bazowej (tabela 4 i wykres 2) wskazują, że:

• Dla $h = 2, 3$ modele DFM są nieznacznie gorsze od najlepszych metod wzorcowych (tj. modeli AR i LEAD),

• Dla $h > 3$ modele DFM są co najmniej porównywalne z najlepszymi prognozami wzorcowymi, a ich przewaga zwiększa się wraz z horyzontem prognozy (błąd RMSE modelu DFM z jednym czynnikiem stanowi średnio około 50% błędu uzyskanego dla najlepszego modelu wzorcowego)¹⁵.

Dodatkowo podjęto dalsze próby zmniejszenia błędu prognoz przez wyłączenie z bazy danych modelu DFM: (1) zmiennych o najniższych ładunkach, (2) zmiennych najslabiej skorelowanych (bieżąc i z opóźnieniem) ze zmienną prognozowaną i (3) poszczególnych grup zmiennych uporządkowanych tematycznie. Zabiegi te nie wpływały istotnie na uzyskiwane błędy prognoz.

Przewaga dokładności prognoz otrzymanych za pomocą modelu DFM nad prognozami z modeli porównawczych znajduje także potwierdzenie w innych badaniach tego typu. Przykładem takiego badania jest artykuł Kotłowskiego (2008), w którym statystycznie istotna przewaga modeli DFM w prognozowaniu inflacji w Polsce została potwierdzona w krótkich horyzontach (obejmujących

¹⁵ Nie udało się tej przewagi potwierdzić w krótszym okresie weryfikacji – por. tabela 5 w Aneksie C.

1 miesiąc i 3 miesiące). Wykorzystany model czynnikowy zbudowany był na bazie 92 zmiennych, a w równaniu prognostycznym wykorzystano dwa wspólne czynniki z jednym opóźnieniem. Rolę modeli wzorcowych w tym przypadku odegrały modele: autoregresyjny pierwszego rzędu, wskaźników wyprzedzających i prosty model VAR.

5. Podsumowanie

W opracowaniu podjęto próbę zastosowania dynamicznych modeli czynnikowych (DFM) do prognozowania inflacji w Polsce. Na podstawie danych statystycznych obejmujących szeregi miesięczne dostępne na 15. dzień miesiąca sporządzono prognozy inflacji publikowanej w bieżącym miesiącu (ang. *nowcasting*), a także na kolejne miesiące (do 12 miesięcy naprzód). Otrzymane rezultaty można podsumować następująco.

1. Prognozy inflacji CPI uzyskane za pomocą modelu DFM dla krótszych horyzontów ($h < 6$) są porównywalne z najlepszymi prognozami wzorcowymi. Dla dłuższych horyzontów charakteryzują się mniejszymi błędami RMSE (w najdłuższym rozważanym horyzoncie są o około 30% niższe od modeli wzorcowych)¹⁶,

2. Prognozy inflacji bazowej (z wyłączeniem cen żywności i energii) z wykorzystaniem DFM w podstawowym okresie weryfikacji były dla horyzontów $h > 3$ porównywalne z wynikami uzyskanymi za pomocą konkurencyjnych metod lub lepsze. Przewaga ta nie została potwierdzona w krótszym okresie weryfikacji.

Zaprezentowane w pracy wyniki dla modeli DFM pozwalają sądzić, że efektywne korzystanie z dużego zbioru danych może obniżyć błędy prognoz inflacji poza próbę, szczególnie dla dłuższych horyzontów prognozy. Podobne wyniki uzyskano we wcześniejszych badaniach (np. Kapetanios i in. 2008; Berger, Stavrev 2008).

Przedmiotem dalszych badań autorów będzie analiza czynnikowa z użyciem zmiennych, wybieranych na podstawie ich związku statystycznego ze zmienną prognozowaną (Bai, Ng 2008). Pogłębiona analiza tej klasy modeli może umożliwić ekonomiczną identyfikację źródeł inflacji oraz pomóc w poprawie jakości prognoz wykorzystujących modele czynnikowe.

Bibliografia

- Altissimo F., Bassanetti A., Cristadoro R., Forni M., Hallin M., Lippi M., Reichlin L., Giannoni V. (2001), *EuroCOIN: A Real Time Coincident Indicator of the Euro Area Business Cycle*, CEPR Discussion Papers, 3108.
- Angelini E., Bańbura M., Runstler G. (2008), *Estimating and Forecasting the Euro Area Monthly National Accounts From a Dynamic Factor Model*, ECB Working Paper, 953.
- Angelini E., Henry J., Mestre, R. (2001), *Diffusion Index-based Inflation Forecasts for the Euro Area*, ECB Working Paper, 061.

¹⁶ Wyniki testu statystycznego Harveya (Harvey i in. 1997) oraz testu SPA (Hansen 2005) – por. Aneks D – wskazują, że przewaga modelu DFM nie jest istotna statystycznie. Ze względu na stosunkowo krótką próbę przy interpretacji wyników tych testów należy jednak zachować ostrożność.

- Arratibel O., Kamps C., Leiner-Killinger N. (2009), *Inflation Forecasting in the New EU Member States*, ECB Working Paper, 1015.
- Aruoba B., Diebold F., Scotti C. (2008), *Real-Time Measurement of Business Conditions*, NBER Working Paper, 14349.
- Bai J., Ng S. (2002), Determining the Number of Factors in Approximate Factor Models, *Econometrica*, 70 (1), 191–221.
- Bai J., Ng S. (2008), Forecasting Economic Time Series Using Targeted Predictors, *Journal of Econometrics*, 146 (2), 304–317.
- Banerjee A., Marcellino M., Masten I. (2005), Leading Indicators for Euro-area Inflation and GDP Growth, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 67 (supplement).
- Berger H., Stavrev E. (2008), *The Information Content of Money in Forecasting Euro Area Inflation*, IMF Working Paper, 08/166.
- Bernanke B.S., Boivin J. (2003), Monetary Policy in a Data-rich Environment, *Journal of Monetary Economics*, 50 (3), 525–546.
- Bernanke B.S., Boivin J., Elias P. (2005), Measuring the Effects of Monetary Policy: A Factor-Augmented Vector Autoregressive (FAVAR) Approach, *Quarterly Journal of Economics*, 120 (1), 387–422.
- Boivin J., Giannoni M.P. (2006), Has Monetary Policy Become More Effective? *Review of Economics and Statistics*, 88 (3), 445–462.
- Boivin J., Ng S. (2005), Understanding and Comparing Factor-Based Forecasts, *International Journal of Central Banking*, 1 (3), 117–151.
- Boivin J., Ng S. (2006), Are More Data Always Better for Factor Analysis? *Journal of Econometrics*, 132 (1), 169–194.
- Breitung J., Eickmeier S. (2006), Dynamic Factor Models, *AStA Advances in Statistical Analysis*, 90 (1), 27–42.
- Brzoza-Brzezina M., Kotłowski J. (2009), Bezwzględna stopa inflacji w gospodarce polskiej, *Gospodarka Narodowa*, 20 (9), 1–21.
- Chamberlain, G., Rothschild, M. (1983), Arbitrage Factor Structure, and Mean-variance Analysis of Large Asset Markets, *Econometrica*, 51 (5), 1281–1304.
- Cristadoro R., M. Forni, L. Reichlin, G. Veronese (2005), A Core Inflation Indicator for the Euro Area. *Journal of Money, Credit and Banking*, 37 (3), 539–560.
- Del Negro M., Otrok C. (2007), 99 Luftballons: Monetary Policy and the House Price Boom Across U.S. States, *Journal of Monetary Economics*, 54 (7), 1962–1985.
- Doz C., Giannone D., Reichlin L. (2006a), *A Quasi Maximum Likelihood Approach for Large Approximate Dynamic Factor Models*, ECB Working Paper, 674.
- Doz C., Giannone D., Reichlin L. (2006b), *A Two-step Estimator for Large Approximate Dynamic Factor Models Based on Kalman Filtering*. THEMA Working Papers, 23.
- Forni M., Hallin M., Lippi M., Reichlin L. (2000), The Generalized Dynamic-Factor Model: Identification and Estimation, *The Review of Economics and Statistics*, 82 (4), 540–554.
- Forni M., Lippi M. (1997), *Aggregation and the Microfoundations of Dynamic Macroeconomics*, Oxford University Press, New York.
- Forni M., Reichlin L. (1998), Let's Get Real: A Factor Analytical Approach to Disaggregated Business Cycle Dynamics, *The Review of Economic Studies*, 65 (3), 453–473.

- Gavin W.T., Kliesen K.L. (2006), *Forecasting Inflation and Output: Comparing Data-rich Models with Simple Rules*, Federal Reserve Bank of St. Louis Working Papers, 054.
- Giannone D., Reichlin L., Small D. (2008), Nowcasting: The Realtime Informational Content of Macroeconomic Data, *Journal of Monetary Economics*, 55 (4), 665–676.
- Gosselin M., Tkacz G. (2010), Using Dynamic Factor Models to Forecast Canadian Inflation: the Role of US Variables, *Applied Economic Letters*, 17 (1), 15–18.
- Hansen P.R. (2005), A Test for Superior Predictive Ability, *Journal of Business and Economic Statistics*, 23 (4), 365–380.
- Harvey D., Leybourne S., Newbold P. (1997), Testing the Equality of Prediction Mean Squared Errors, *International Journal of Forecasting*, 13 (2), 281–291.
- Jacobs J., Otter P. (2008), Determining the Number of Factors and Lag Order in Dynamic Factor Models: A Minimum Entropy Approach, *Econometric Reviews*, 27 (4–6), 385–397.
- Kapetanios G., Labhard V., Price S. (2008), Forecast Combination and the Bank of England's Suite of Statistical Forecasting Models, *Economic Modelling*, 25 (4), 772–792.
- Kapetanios G., Marcellino M. (2003), *A Comparison of Estimation Methods for Dynamic Factor Models of Large Dimensions*, University of London Queen Mary Economics Working Paper, 489.
- Kotłowski J. (2008), *Forecasting Inflation with Dynamic Factor Model – the Case of Poland*, Warsaw School of Economics Working Paper, 24.
- Marcellino M. (2004), Forecast Pooling for European Macroeconomic Variables, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 66 (1), 91–112.
- Marcellino M., Stock J.H., Watson M.W. (2003), Macroeconomic Forecasting in the Euro Area: Country Specific versus Area-Wide Information, *European Economic Review*, 47 (1), 1–18.
- Onatski A. (2009), Testing Hypotheses about the Number of Factors in Large Factor Models, *Econometrica*, 77 (5), 1447–1479.
- Rencher A.C. (2002): *Methods of Multivariate Analysis*, John Wiley, New York.
- Schumacher C. (2007), Forecasting German GDP Using Alternative Factor Models Based on Large Datasets, *Journal of Forecasting*, 26 (4), 271–302.
- Stock J.H., Watson M.W. (1998), *Diffusion Indexes*, NBER Working Paper, 6702.
- Stock J.H., Watson M.W. (1999), Forecasting Inflation, *Journal of Monetary Economics*, 44 (2), 293–335.
- Stock J.H., Watson M.W. (2002a), Forecasting Using Principal Components From a Large Number of Predictors, *Journal of the American Statistical Association*, 97 (460), 1167–1179.
- Stock J.H., Watson M.W. (2002b), Macroeconomic Forecasting Using Diffusion Indexes, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20 (2), 147–162.
- Stock J.H., Watson M.W., (2006), *Forecasting with Many Predictors*, w: C. Granger, A. Timmermann, G. Elliott, *Handbook of Economic Forecasting*, Volume 1, Chapter 10. Elsevier, Amsterdam
- Wang M.C., (2009), Comparing the DSGE Model with the Factor Model: an Out-of-sample Forecasting Experiment, *Journal of Forecasting*, 28 (2), 167–182.
- Watson M.W., Stock J.H. (2004), Combination Forecasts of Output Growth in a Seven-country Data Set, *Journal of Forecasting*, 23 (6), 405–430.

Aneks A. Wykorzystane dane statystyczne¹⁷

Tabela 1

Wykorzystane dane statystyczne (grupy zmiennych)

Nazwa grupy	Ilość	Dostosowanie sezonowe	Transformacja	Opóźnienie publikacyjne
Badania koniunktury (handel)	11	Tak, addytywnie	Δ	1 miesiąc
Badania koniunktury (przemysł)	11	Tak, addytywnie	Δ	1 miesiąc
Badania koniunktury (budownictwo)	12	Tak, addytywnie	Δ	1 miesiąc
Handel zagraniczny	13	Różnie	$\Delta \ln$ lub Δ	3 miesiące
Kursy walut	4	Nie	$\Delta \ln$	+0,5 miesiąca
Rynek pieniężny i obligacje	8	Nie	Δ	+0,5 miesiąca
Indeksy giełdowe	8	Nie	$\Delta \ln$	+0,5 miesiąca
Podaż pieniądza	6	Tak, multiplikatywnie	$\Delta \ln$	2 miesiące
Rezerwa obowiązkowa	3	Tak, multiplikatywnie	$\Delta \ln$	3 miesiące
Bilans skonsolidowany monetarnych instytucji finansowych	11	Tak, multiplikatywnie	$\Delta \ln$	2 miesiące
Indeksy cen PPI	9	Tak, addytywnie	Brak	2 miesiące
Pozostałe wskaźniki gospodarcze	10	Tak, różnie	$\Delta \ln$ lub Δ	2 miesiące
Rynek pracy	8	Tak, różnie	$\Delta \ln$ lub Δ	2 miesiące
Finanse publiczne	4	Tak, multiplikatywnie	$\Delta \ln$	2 miesiące
Ceny surowców	15	Nie	$\Delta \ln$	1 miesiąc
Ceny paliw	3	Nie	$\Delta \ln$	+0,5 miesiąca
Ceny produktów rolnych	6	Tak, multiplikatywnie	$\Delta \ln$	+0,5 miesiąca
Indeksy cen CPI	40	Tak, multiplikatywnie	Brak	1 miesiąc

¹⁷ Ze względu na znaczne rozmiary załącznika szczegóły dotyczące zastosowanych danych statystycznych udostępnimy na życzenie – w takim przypadku prosimy o kontakt mailowy z autorami.

Aneks B. Błędy prognoz dla 12-miesięcznego okresu weryfikacji

Tabela 2

Błędy prognoz $h = 1$ (nowcasting) – inflacja CPI (pkt proc.)

Model	Postać DFM (liczba czynników)	Ranking (RMSE)	RMSE	MAE	ME
AR	–	4	0,297	0,229	0,035
RW	–	5	0,315	0,278	-0,033
Lead	–	6	0,316	0,259	0,041
Zwykła średnia	–	8	0,604	0,468	-0,468
DFM_PC	5	7	0,317	0,221	0,102
DFM_PC	1	3	0,292	0,232	0,007
DFM_Kal	1	2	0,290	0,234	-0,005
DFM_Doż	1	1	0,289	0,235	0,000

Tabela 3

Błędy prognoz $h = 1$ – inflacja bazowa z wyłączeniem cen żywności i energii (pkt proc.)

Model	Postać DFM (liczba czynników)	Ranking (RMSE)	RMSE	MAE	ME
AR	–	3	0,182	0,145	0,045
RW	–	5	0,212	0,149	-0,012
Lead	–	1	0,165	0,127	0,033
Zwykła średnia	–	7	0,235	0,186	0,159
DFM_PC	1 czynnik, 2 opóźnienia	6	0,221	0,146	-0,031
DFM_PC	1	5	0,212	0,143	-0,014
DFM_Kal	1	4	0,209	0,138	-0,024
DFM_Doż	1	2	0,180	0,122	-0,015

Aneks C. Błędy prognoz dla 12-miesięcznego okresu weryfikacji

Tabela 4

Błędy prognoz $h = 2, 3, 6, 9, 12$ – inflacja CPI (pkt proc.) – okres weryfikacji 12 miesięcy

Horyzont prognoz		Prognozy					
		AR	RW	Lead	Zwykła średnia	DFM_PC (1 czynnik, 1 opóźnienie)	DFM_PC (3 czynniki, 1 opóźnienie)
$h = 2$	RMSE	0,543	0,521	0,524	0,649	0,539	0,527
	MAE	0,439	0,389	0,425	0,533	0,459	0,437
	ME	-0,164	-0,124	-0,140	-0,533	-0,260	-0,141
$h = 3$	RMSE	0,653	0,673	0,613	0,671	0,643	0,703
	MAE	0,505	0,514	0,479	0,582	0,536	0,571
	ME	-0,092	-0,213	-0,052	-0,582	-0,279	-0,134
$h = 6$	RMSE	0,885	0,922	0,783	0,608	0,777	0,943
	MAE	0,803	0,723	0,679	0,573	0,656	0,794
	ME	0,209	-0,501	0,309	-0,573	-0,250	-0,108
$h = 9$	RMSE	0,898	0,797	0,763	0,564	0,783	0,882
	MAE	0,785	0,675	0,683	0,488	0,655	0,743
	ME	0,493	-0,607	0,575	-0,365	-0,236	-0,146
$h = 12$	RMSE	0,861	0,904	0,918	0,643	0,435	0,948
	MAE	0,726	0,829	0,845	0,544	0,324	0,797
	ME	0,516	-0,829	0,245	0,000	-0,086	-0,450

Tabela 5

Błędy prognoz $h = 2, 4, 6, 8, 12$ – inflacja bazowa (pkt proc.)

Horyzont prognoz		Prognozy					
		AR	RW	Lead	Zwykła średnia	DFM_PC (1 czynnik, 1 opóźnienie)	DFM_PC (3 czynniki, 1 opóźnienie)
$h = 2$	RMSE	0,216	0,300	0,171	0,284	0,359	0,393
	MAE	0,181	0,228	0,139	0,216	0,263	0,304
	ME	-0,057	-0,014	-0,077	0,212	-0,217	-0,211
$h = 3$	RMSE	0,239	0,358	0,154	0,349	0,490	0,532
	MAE	0,181	0,296	0,107	0,280	0,369	0,424
	ME	-0,057	-0,017	-0,011	0,280	-0,294	-0,298
$h = 6$	RMSE	0,390	0,400	0,329	0,612	0,842	0,864
	MAE	0,291	0,334	0,286	0,553	0,766	0,797
	ME	0,201	0,108	-0,272	0,553	-0,624	-0,712
$h = 9$	RMSE	0,678	0,393	0,620	0,897	1,154	0,900
	MAE	0,564	0,293	0,565	0,847	1,078	0,816
	ME	0,420	0,256	0,539	0,847	-1,078	-0,816
$h = 12$	RMSE	0,709	0,641	0,715	1,196	1,066	0,881
	MAE	0,546	0,513	0,643	1,163	0,974	0,837
	ME	0,497	0,478	0,525	1,163	-0,974	-0,837

Załącznik D. Testowanie hipotez o trafności prognoz CPI

W teście Harveya i in. (1997, HLN) testowano hipotezę zerową o równej trafności najlepszego (dla danego horyzontu) modelu DFM oraz najlepszego (dla danego horyzontu) modelu wzorcowego¹⁸. Zestaw testowanych hipotez ma następującą postać:

$$H_0: MSE_{DFM} = MSE_{WZORC}$$

$$H_1: MSE_{DFM} \neq MSE_{WZORC}$$

gdzie: MSE_{DFM} , MSE_{WZORC} to błędy średniokwadratowe, odpowiednio: najlepszego modelu DFM i najlepszego modelu wzorcowego.

Z kolei w teście Superior Predictive Ability (SPA; Hansen, 2005) testowano hipotezę, że żaden z modeli wzorcowych nie charakteryzuje się większą trafnością od najlepszego (dla danego horyzontu) modelu DFM. Zestaw testowanych hipotez ma następującą postać:

$$H_0: \forall MSE_{DFM} \leq MSE_i$$

$$H_1: \exists MSE_{DFM} > MSE_i$$

gdzie: MSE_{DFM} , MSE_i – błędy średniokwadratowe, odpowiednio: najlepszego modelu DFM i modeli wzorcowych ($i = AR, RW, Lead, \acute{s}$ rednia).

Tabela 6

Wyniki testów Harveya i in. (1997) oraz testu Superior Predictive Ability dla prognoz indeksu CPI (w %)

	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$
HLN (<i>p-value</i>)	97,6	81,9	23,0	24,3	84,5	86,0
SPA (<i>p-value</i>)	31,7	49,8	46,7	48,3	51,5	61,0
	$h = 7$	$h = 8$	$h = 9$	$h = 10$	$h = 11$	$h = 12$
HLN (<i>p-value</i>)	78,5	77,5	86,7	97,6	77,4	53,5
SPA (<i>p-value</i>)	59,7	59,7	66,9	66,4	65,2	66,3

Uwaga: *p-value* oznacza empiryczny poziom istotności testu.

Rezultaty zaprezentowane w tabeli 6 wskazują, że:

– dla wszystkich horyzontów $h = 1, \dots, 12$ dokładność prognoz DFM i najlepszej prognozy wzorcowej jest porównywalna, tj. różnica między błędami prognoz MSE z modelu czynnikowego i modeli wzorcowych jest statystycznie nieistotna,

– dla wszystkich horyzontów $h = 1, \dots, 12$ żadna z prognoz wzorcowych nie jest istotnie lepsza (w sensie trafności) od modelu DFM.

¹⁸ Dziękujemy Pawłowi Skrzypczyńskiemu za udostępnienie oprogramowania do testu HLN.

Podziękowania

Autorzy pragną podziękować wszystkim uczestnikom seminarium Instytutu Ekonomicznego NBP z 23.09.2009 r. za cenne uwagi i komentarze do wstępnej wersji opracowania.

Short-term inflation forecasting using factor models

Abstract

Dynamic Factor Models are useful forecasting tools in data-rich macroeconomic environment. In the paper we test short-term forecasting ability of diffusion index model for two Polish inflation indices (overall CPI and core inflation). To this end, we generate factors collecting synthetic information from a large macroeconomic database consisting of 182 monthly time series from the period 1999–2009 and use them in direct forecasting exercises.

The forecasting results compared to popular benchmark models (AR, leading indicator, random walk, simple mean) suggest that out-of-sample prediction errors can be reduced when using factor models, especially for longer horizons (up to a year ahead). Similar conclusions for other inflation series have been drawn in other studies.

Keywords: inflation, forecasting, dynamic factor models

